Polynomiers rødder – Lills metode

Jens Carstensen, Frederiksberg

Funktionsværdier og nulpunkter for polynomier bestemmes i vore dage ved hjælp af et passende matematikprogram. Vi skal her se på en lidt spøjs metode til en tilnærmelsesvis fastlæggelse af eventuelle rødder i et polynomium.

Horners skema

Vi begynder med Horners skema, som tidligere blev introduceret i gymnasiet. Betragt polynomiet

$$p(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 5x + 6$$

Vi kan skrive dette sådan:

$$p(x) = (3x^3 - 4x^2 - x + 5)\cdot x + 6$$
$$= ((3x^2 - 4x - 1)\cdot x + 5)\cdot x + 6$$
$$= (((3x - 4)\cdot x - 1)\cdot x + 5)\cdot x + 6$$

Udregning af funktionsværdien $p(2)$ foregår ved disse regninger af parenteserne:

$3\cdot 2 - 4 = 2 \qquad 3\cdot 2 + 5 = 11$
$2\cdot 2 - 1 = 3 \qquad 11\cdot 2 + 6 = 28$

Regningerne kan praktisk stilles op i det såkaldte Horners skema som vist.

	3	–4	–1	5	6
	0	6	4	6	22
2	3	2	3	11	28

Vi får, at $p(2) = 28$ og desuden, at

$$3x^4 - 4x^3 - x^2 + 5x + 6$$
$$= (x - 2)(3x^3 + 2x^2 + 3x + 11) + 28$$

Skemaet bruges altså i virkeligheden til polynomiers division.

Lills metode

I 1867 foreslog den franske matematiker *M. E. Lill* en grafisk metode til bestemmelse af polynomiers rødder. Hans snedige teknik, der i mellemtiden er blevet glemt, kan ikke fastlægge polynomiers rødder præcist, men giver en anderledes måde at repræsentere koefficienternes indflydelse på rødderne.

Vi ser på polynomiet

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$$

og på ternet papir afsættes linjestykket AB af en længde svarende til koefficienten til x^3, dvs. 1. Derefter afsættes linjestykkerne BC, CD og DE vinkelret på hinanden af længder 2, 1 og 1 svarende til koefficienternes numeriske værdi.

Fortegnene for koefficienterne er $+ + - -$. Hvert linjestykke tegnes i fortsættelse af det foregående således, at man drejer til højre, hvis der *ikke* er fortegnsskift og til venstre, hvis der *er* fortegnsskift.

Der er ikke fortegnsskift mellem første og anden koefficient, så ABC og CDE giver en højredrejning. Der optræder fortegnsskift mellem anden og tredje koefficient, så BCD er en venstredrejning.

Nu forlænges (om nødvendigt) linjestykkerne BC, CD og DE. Ud fra A tegnes en sammenhængende følge (en vej) af vinkelrette linjestykker. Vi begynder med at tegne AP, hvor P vælges på BC (eller dens forlængelse). Derefter vandres til punktet Q på CD og til R på DE. Vi har så fået vejen $APQR$.

Derefter justerer vi $\angle BAP$, så R falder sammen med slutpunktet E som vist på figuren. Vi sætter $x = BP$ og da ΔABP og ΔQDE er ensvinklede, er

$$\frac{PB}{AB} = \frac{DE}{DQ} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{DQ} \quad \Leftrightarrow \quad DQ = \frac{1}{x}$$

Desuden er ΔADP og ΔPCB ensvinklede, så

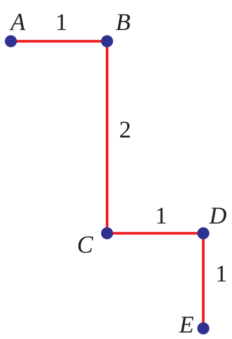
$$\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{PC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1} = \frac{\frac{1}{x}+1}{x+2}$$

Ved at gange over kors fås

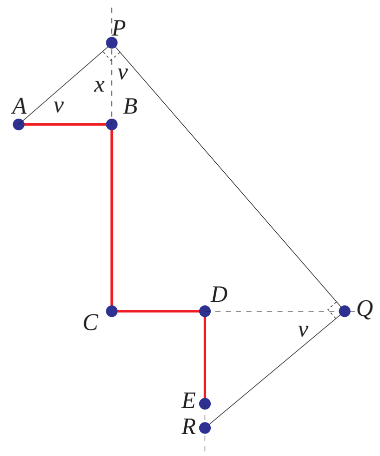
$$x(x+2) = \tfrac{1}{x}+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x+2) = x+1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$$

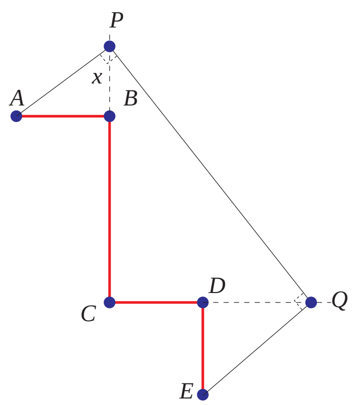
Derfor er længden $x = BP$ altså en rod i polynomiet!

Det er klart, at denne finurlige geometriske metode ikke er i stand til at bestemme rødderne særlig præcist. Men den er da morsommere end en indtastning i et matematikprogram.



$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$





Polynomiet har yderligere to rødder, der er negative. Vi vælger punktet P under B, dvs. P ligger på samme side af AB som C. Længden x regnes altså negativ på denne måde.

Forbindelse til Horners skema

Lad os se på den midterste figur ovenfor, hvor E ikke falder sammen med R. Her er x netop tangens til vinklen mærket v, så

$$x = \frac{BP}{AB} = \frac{CQ}{CP} = \frac{DR}{DQ}$$

Da $AB = 1$ får vi ved hjælp heraf:

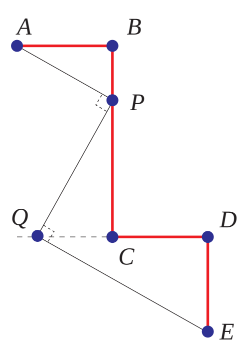
$$BP = AB \cdot x = 1 \cdot x$$
$$CP = x + 2$$
$$CQ = x \cdot CP = x \cdot (x + 2)$$
$$DQ = CQ - CD = x \cdot (x + 2) - 1$$
$$DR = x \cdot DQ = x \cdot (x \cdot (x + 2) - 1)$$
$$ER = DR - DE = x \cdot (x \cdot (x + 2) - 1) - 1$$

Dette sidste udtryk for ER er netop polynomiet $p(x)$ skrevet på den form, der giver anledning til Horners skema.

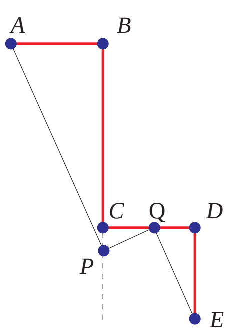
Den sidste figur viser diagrammet hørende til polynomiet $p(x) = x^2 + 2x + 2$, som ikke har reelle rødder. Man kan ikke på linjestykket BC eller dets forlængelser finde et punkt P, så $\angle APD$ er ret.

Henvisning

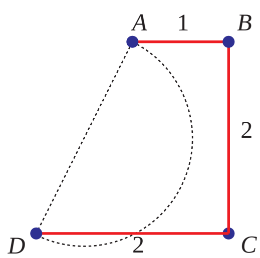
John A. Shanks: *Horner in the Corner* (Function, Volume 27, 2003).



Rod −0,55



Rod −2,25



$p(x) = x^2 + 2x + 2$