Gyldne snit og Fibonaccital

Alf Riisom, Midtfyns Gymnasium

Definition

Ved talfølgen $\{F_n\}$ forstås talfølgen, hvor det næste tal i talfølgen fås ved at lægge de 2 foregående tal sammen:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n > 1$$

hvor F_1 og F_2 er givet og ikke begge nul.

I det følgende vises, at med mindre $F_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$, så har kvotienten a_n defineret nedenfor grænseværdien $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Hvis $F_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$, så er grænseværdien $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Det ses, at

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} - F_{n-2} = 2F_n - F_{n-2},\ \text{når } n > 2.$$

Hvis der kigges på tilfælde hvor F_n er positive for $n > M$, vil der klart gælde, at F_n er en voksende følge, når $n > M$. Der gælder derfor, at $F_n / F_m < 1$ når $m > n > M$.

Definer kvotientrækken: $a_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Der gælder for $n > 2$ og F_n positiv, at

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{2F_n - F_{n-2}}{F_n} = 2 - \frac{F_{n-2}}{F_n}$$
$$= 2 - \frac{F_{n-2}}{F_{n-1} + F_{n-2}} > 2 - \frac{F_{n-2}}{2F_{n-2}} = 1{,}5$$

Ulighedstegnet skyldes, at $2F_{n-2} < F_{n-1} + F_{n-2}$, så nævneren bliver mindre. Derved trækkes et større tal fra.

Så $1{,}5 < a_n < 2$ for alle $n > 2$, når startværdierne er positive. Det samme vil helt klart gælde, hvis de begge er negative. Det vil også gælde for $n > k$, hvis F_{k-1} og F_k har sammen fortegn.

Vi prøver nu at finde en betingelse, så to på hinanden følgende værdier af F_n, F_k og F_{k+1} altid har forskelligt fortegn.

Hvis det skal gælde, skal F_1 være negativt, F_2 positivt og F_3 igen negativt, F_4 positivet osv. eller omvendt. Så snart der er to værdier efter hinanden med samme fortegn, vil det ikke ændre sig herefter.

Vi ser på det første tilfælde, dvs. de ulige F_n–værdier skal være negative og de lige positive. Det modsatte tilfælde kan analyseres på samme måde.

Lad os kigge på de forskellige situationer:

1) $|F_1| < F_2$: Så bliver $F_3 > 0$ og fortegnet derefter positivt. Virker ikke.

2) $|F_1| = F_2$: Så bliver $F_3 = 0$ og fortegnet derefter positivt. Virker ikke.

3) $\frac{1}{2}|F_1| > F_2$: Her er $F_3 = F_1 + F_2 < F_1 - \frac{1}{2}F_1 = \frac{1}{2}F_1$ og $F_4 = F_2 + F_3 < \frac{1}{2}|F_1| + \frac{1}{2}F_1 = 0$, så $F_4 < 0$, dermed har F_3 og F_4 samme fortegn.

4) $\frac{1}{2}|F_1| = F_2$: Så bliver $F_3 = \frac{1}{2}F_1$ og $F_4 = 0$, og herefter vil værdierne være negative.

Konklusionen er derfor, at $\frac{1}{2}|F_1| < F_2 < F_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}F_1 < F_2 < -F_1$, hvis fortegnet ikke skal blive konstant.

Men man kan jo bruge samme argument på F_3 og F_4, så

$$-\frac{1}{2}F_3 < F_4 < -F_3 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{2}(F_1 + F_2) < F_1 + 2F_2 < -(F_1 + F_2) \Leftrightarrow$$
$$-\frac{3}{2}F_1 < \frac{5}{2}F_2 \wedge 2F_1 < -3F_2 \Leftrightarrow F_2 > -\frac{3}{5}F_1 \wedge F_2 < -\frac{2}{3}F_1$$

Dvs. $-\frac{3}{5}F_1 < F_2 < -\frac{2}{3}F_1$ eller $\frac{3}{5}|F_1| < F_2 < \frac{2}{3}|F_1|$.

Her er brugt, at $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_n + F_{n-1} + F_n = F_{n-1} + 2F_n$ med $n = 2$.

Man kan også bruge samme argument på F_5 og F_6. Så fås med de samme udregninger

$$-\frac{3}{5}F_3 < F_4 < -\frac{2}{3}F_3 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{3}{5}(F_1 + F_2) < F_1 + 2F_2 < -\frac{2}{3}(F_1 + F_2) \Leftrightarrow$$
$$-\frac{8}{5}F_1 < \frac{13}{5}F_2 \wedge \frac{5}{3}F_1 < -\frac{8}{3}F_2 \Leftrightarrow$$
$$F_2 > -\frac{8}{13}F_1 \wedge F_2 < -\frac{5}{8}F_1$$

Dvs. $-\frac{8}{13}F_1 < F_2 < -\frac{5}{8}F_1$ eller $0{,}615|F_1| < F_2 < 0{,}625|F_1|$.

Men de værdier genkendes jo fra det gyldne snit, som dem der har den anden løsning til andengradsligningen, nemlig $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, som grænseværdi.

Lad os se på det generelle tilfælde:

$$-\frac{1}{2}F_{2n+1} < F_{2n+2} < -F_{2n+1} \Leftrightarrow -\frac{3}{5}F_{2n-1} < F_{2n} < -\frac{2}{3}F_{2n-1} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{5}(F_{2n-3}+F_{2n-2})<F_{2n-3}+2F_{2n-2}<-\frac{2}{3}(F_{2n-3}+F_{2n-2})\Leftrightarrow$$
$$-\frac{8}{5}F_{2n-3}<\frac{13}{5}F_{2n-2}\wedge\frac{8}{3}F_{2n-2}<-\frac{5}{3}F_{2n-3}\Leftrightarrow$$
$$-\frac{8}{13}F_{2n-3}<F_{2n-2}<-\frac{5}{8}F_{2n-3}\Leftrightarrow$$
$$-\frac{8}{13}\left(F_{2n-5}+F_{2n-4}\right)<F_{2n-5}+2F_{2n-4}<-\frac{5}{8}\left(F_{2n-4}+F_{2n-5}\right)\Leftrightarrow$$
$$-\frac{21}{13}F_{2n-5}<\frac{34}{13}F_{2n-4}\wedge\frac{21}{8}F_{2n-4}<-\frac{13}{8}F_{2n-3}\Leftrightarrow$$
$$-\frac{21}{34}F_{2n-5}<F_{2n-4}<-\frac{13}{21}F_{2n-5}$$

Lad os se på hvordan F_{2n+1} udregnes.

$$\begin{aligned}F_{2n+1}&=F_{2n}+F_{2n-1}=2F_{2n-1}+F_{2n-2}\\&=3F_{2n-2}+2F_{2n-3}=5F_{2n-3}+3F_{2n-4}=\ldots\end{aligned}$$

Det ses, at hver gang indekset falder med 1, bliver koefficienterne pga. den måde rækken udregnes på 2 Fibonaccital, startende med Fibonaccital nr. 2 og 1, så nr. 3 og 2 osv. For at få en formel, der udregner F_{2n+1} ud fra F_1 og F_2, skal man bruge $2n-1$ lighedstegn.

Kald det n'te Fibonaccital for u_n. Så der gælder, at

$$F_{2n+1}=u_{2n}\cdot F_2+u_{2n-1}\cdot F_1$$

hvor u_{2n} er Fibonaccital nr. $2n$. Fibonaccital nr. 1 og 2 er begge 1.

Der gælder tilsvarende at

$$F_{2n+2}=u_{2n+1}\cdot F_2+u_{2n}\cdot F_1$$

Derfor fås:

$$-½F_{2n+1}<F_{2n+2}<-F_{2n+1}\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned}-½\left(u_{2n}\cdot F_2+u_{2n-1}\cdot F_1\right)&<u_{2n+1}\cdot F_2+u_{2n}\cdot F_1\\&<-\left(u_{2n}\cdot F_2+u_{2n-1}\cdot F_1\right)\Leftrightarrow\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}-\left(½\cdot u_{2n-1}+u_{2n}\right)\cdot F_1&<\left(½\cdot u_{2n}+u_{2n+1}\right)\cdot F_2\\&\wedge\left(u_{2n+1}+u_{2n}\right)\cdot F_2<-\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)\cdot F_1\Leftrightarrow\end{aligned}$$
$$-\frac{½\cdot u_{2n-1}+u_{2n}}{½\cdot u_{2n}+u_{2n+1}}\cdot F_1<F_2\wedge F_2<-\frac{u_{2n-1}+u_{2n}}{\left(u_{2n+1}+u_{2n}\right)}\cdot F_1\Leftrightarrow$$
$$-\frac{½\cdot u_{2n-1}+u_{2n}}{½\cdot u_{2n}+u_{2n+1}}\cdot F_1<F_2<-\frac{u_{2n-1}+u_{2n}}{\left(u_{2n+1}+u_{2n}\right)}\cdot F_1$$

Men $\dfrac{u_{2n-1}+u_{2n}}{\left(u_{2n+1}+u_{2n}\right)}=\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}$ og

$$\frac{½\cdot u_{2n-1}+u_{2n}}{\left(½\cdot u_{2n}+u_{2n+1}\right)}=\frac{u_{2n-1}+2u_{2n}}{\left(u_{2n}+2u_{2n+1}\right)}=\frac{u_{2n+1}+u_{2n}}{\left(u_{2n+1}+u_{2n+2}\right)}=\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}}$$

Så der gælder:

$$-\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}}\cdot F_1<F_2<-\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}\cdot F_1$$

Det ses ved at lade $n\to\infty$, at begge brøker (med "–") går mod $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Det er velkendt fra teorien om Fibonaccital, da produktet af de to rødder $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er -1.

Dermed følger altså, at med mindre $F_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$, så vil F_k og F_{k+1} have samme fortegn for k stor nok. Så der gælder følgende sætning:

Sætning1
Hvis ikke $F_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$, findes der et tal M, så fortegnet for F_k ikke ændres, når $k>M$: ■

Binets formel: $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Men hvad sker der, hvis $F_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$?

$$\begin{aligned}a_{2n}&=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}=\frac{u_{2n}\cdot F_2+u_{2n-1}\cdot F_1}{u_{2n-1}\cdot F_2+u_{2n-2}\cdot F_1}\\&=\frac{u_{2n}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1+u_{2n-1}\cdot F_1}{u_{2n-1}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1+u_{2n-2}\cdot F_1}=\frac{u_{2n}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}+u_{2n-1}}{u_{2n-1}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}+u_{2n-2}}=\end{aligned}$$

$$\frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right)}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\right)}\square$$

$$\frac{\left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right)+\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right)}{\left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)+\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\right)}\square$$

$$\frac{-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+1\right)}{-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+1\right)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

hvor $\sqrt{5}$ blev forkortet væk fra starten.

Så hvis $F_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$ så er forholdet $\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ for alle n.

Hvis ikke, så findes et tal M, så fortegnet for F_k ikke ændres, når $k > M$. Om fortegnet er positivt eller negativt, betyder ikke noget for a_n. Så vi betragter $F_k > 0$.

Sætning2

Kvotientrækken $\{ a_n \}$ er konvergent.

Bevis

Hvis $F_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1$ er forholdet konstant $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, og rækken er konvergent.

Ellers findes et M, så rækken har konstant fortegn for $n > M$. Som nævnt tidligere er det nok at se på det positive tilfælde.

Vi skal vise at $a_{n+1}-a_n\to 0$ for $n\to\infty$. Betragt først:

$$\begin{aligned}
&F_{n+2}F_n=(F_{n+1}+F_n)F_n=\left(F_{n+1}+F_n\right)\left(F_{n+1}-F_{n-1}\right)=\\
&F_{n+1}^2+F_{n+1}F_n-F_{n+1}F_{n-1}-F_nF_{n-1}=\\
&F_{n+1}^2+F_{n+1}\left(F_n-F_{n-1}\right)-F_nF_{n-1}=\\
&F_{n+1}^2+F_{n+1}F_{n-2}-F_nF_{n-1}=\\
&F_{n+1}^2+\left(F_n+F_{n-1}\right)F_{n-2}-\left(F_{n-1}+F_{n-2}\right)F_{n-1}=\\
&F_{n+1}^2-F_{n-1}^2+F_nF_{n-2}
\end{aligned}$$

Heraf fås $F_{n+1}^2-F_{n+2}F_n=F_{n-1}^2-F_nF_{n-2}$. Betragt så

$$a_{n+1}-a_n=\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}-\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2}{F_{n+1}F_n}$$

Af det foregående ses det, at tælleren ikke ændrer sig, når n springer med 2. Argumentet gælder selvfølgelig både for lige og ulige værdier. Da nævneren går mod uendelig for $n\to\infty$, går $a_{n+1}-a_n$ mod nul og a_n er konvergent. ■

Sætning 3

Hvis ikke $F_2=\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}F_1$, så er grænseværdien a^* for a_n, når $n\to\infty$, rod i polynomiet $P(z)=z^2-z-1$.

Bevis

Betragt $a_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+a_{n-1}^{-1}$. Lad $n\to\infty$. Så har a_{n-1} jo samme grænseværdi som a_n, og man får, at

$$a^*=\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+a^{*-1}$$

Gang med a^* og omskriv til $a^{*2}-a^*-1=0$.

Da F_n og F_{n+1} har ens fortegn for store n, må det være den positive rod $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.