Mindre fora end matrixgruppernes

ALLAN LIND JENSEN, Nærum Gymnasium

Indledning

En klasse på 28 elever kan opdeles i 7 grupper à 4 elever. Det kan være, at læreren ønsker, at eleverne behandler deres emne sammen med resten af eleverne i små fora. Den oplagte løsning er 4 fora à 7 elever på tværs af grupperne, hvilket er det man forstår ved matrixgrupper. I visse tilfælde kan det dog være et alt for stort forum til det videre arbejde. Der findes faktisk mulighed for arbejde med fora der består af 4 elever hver. Hver elev arbejder med alle emner, og hver elev foresidder arbejdet i 2 fora.

Det er en forudsætning, at eleverne ikke skal bruge input fra alle grupperne [1)].

Denne artikel giver skemaer for arbejdet i de tilfælde, hvor det er ideelt at arbejde i mindre fora i klasser op til og med 28 elever.

1. Betingelser for mindre fora

For at skemaet kan gå op, skal en række betingelser opfyldes. At skemaet går op betyder, at

I alle deltager i én gruppe
II alle arbejder i et forum om hvert emne præcis én gang
III og at der ikke er nogen oversiddere.

I dette arbejde antages det at alle grupperne har samme størrelse, m. Der bruges betegnelserne defineret i dette skema:

n antallet af elever i klassen
g antallet af grupper
m antallet af medlemmer i hver gruppe
f antallet af medlemmer i hvert forum

Betingelse I betyder

$$n = gm$$

og betingelse III, at

$$f \mid n \qquad (1)$$

Der er $n - m$ elever der skal deltage i et forum om hvert emne, og i hvert forum er der $f - 1$ elever der deltager og ikke foresidder. Derfor kan Betingelse II skrives

$$(f-1) \mid (n-m) = m \cdot (g-1) \qquad (2)$$

Denne ligning er trivielt opfyldt, hvis $f = 2$, og hvis $f = m$; det sidste er matrixgrupperne. Disse to tilfælde betegnes som trivielle skemaer.

[1)] Forfatteren har brugt metoden til repetition.

Klassestsørrelser med ikke trivielle fora:

n	g	m	$m \cdot (g-1)$	f	Kommentar
15	5	3	$3 \cdot 2^2$	3	
21	7	3	$2 \cdot 3^2$	3	Hver elev foresidder 3 gange og deltager 9
24	8	3	$3 \cdot 7$	4	Ubalanceret. Skema ikke udarbejdet
24	6	4	$2^2 \cdot 5$	4	Ubalanceret. Skema ikke udarbejdet
27	9	3	$3 \cdot 2^3$	3	Foraene kræver 12 runder
28	7	4	$2^3 \cdot 3$	4	

Et skema betegnes som balanceret, hvis alle elever er med i lige mange fora. Det betyder at alle elever skal foresidde lige mange fora. Antallet af fora hver gruppe skal foresidde er

$$\frac{m \cdot (g-1)}{f-1}$$

At skemaet er balanceret betyder, at antallet af medlemmer i hver gruppe m går op i det tal. Betingelsen kan skrives

$$f-1 \mid g-1 \qquad (3)$$

Denne betingelse er stærkere end (2). Under betingelsen (3) bliver antallet af runder

$$\frac{f \cdot (g-1)}{f-1}$$

3. Skemaer

I skemaerne bliver eleverne betegnet med et tal for gruppenummeret og et bogstav for at skelne eleverne inden for hver gruppe.

15 elever, 5 grupper, 3 i hvert forum

$$\frac{1a2b}{4c} \quad \frac{2a3b}{5c} \quad \frac{3a4b}{1c} \quad \frac{4a5b}{2c} \quad \frac{5a1b}{3c}$$

$$\frac{1a5c}{3b} \quad \frac{2a1c}{4b} \quad \frac{3a2c}{5b} \quad \frac{4a3c}{1b} \quad \frac{5a4c}{2b}$$

$$\frac{3b4c}{1a} \quad \frac{4b5c}{2a} \quad \frac{5b1c}{3a} \quad \frac{1b2c}{4a} \quad \frac{2b3c}{5a}$$

Skemaet læses således, at eleverne 1a, 2b og 4c deltager i samme forum i to runder, hvor henheldsvis 1a og 2b foresidder.

21 elever, 7 grupper, 3 i hvert forum

$\frac{1a2b}{3c}$	$\frac{2a3b}{4c}$	$\frac{3a4b}{5c}$	$\frac{4a5b}{6c}$	$\frac{5a6b}{7c}$	$\frac{6a7b}{1c}$	$\frac{7a1b}{2c}$
$\frac{1a3b}{6c}$	$\frac{2a4b}{7c}$	$\frac{3a5b}{1c}$	$\frac{4a6b}{2c}$	$\frac{5a7b}{3c}$	$\frac{6a1b}{4c}$	$\frac{7a2b}{5c}$
$\frac{1a6c}{4b}$	$\frac{2a7c}{5b}$	$\frac{3a1c}{6b}$	$\frac{4a2c}{7b}$	$\frac{5a3c}{1b}$	$\frac{6a4c}{2b}$	$\frac{7a5c}{3b}$
$\frac{7c4b}{1a}$	$\frac{1c5b}{2a}$	$\frac{2c6b}{3a}$	$\frac{3c7b}{4a}$	$\frac{4c1b}{5a}$	$\frac{5c2b}{6a}$	$\frac{6c3b}{7a}$
$\frac{5c}{1a4b}$	$\frac{6c}{2a5b}$	$\frac{7c}{3a6b}$	$\frac{1c}{4a7b}$	$\frac{2c}{5a1b}$	$\frac{3c}{6a2b}$	$\frac{4c}{7a3b}$

I sidste runde er de tre elever kun sammen i ét forum.

27 elever, 9 grupper, 3 i hvert forum

$\frac{1a2b}{3c}$	$\frac{2a3b}{4c}$	$\frac{3a4b}{5c}$	$\frac{4a5b}{6c}$	$\frac{5a6b}{7c}$	$\frac{6a7b}{8c}$	$\frac{7a8b}{9c}$	$\frac{8a9b}{1c}$	$\frac{9a1b}{2c}$
$\frac{1a4b}{7c}$	$\frac{2a5b}{8c}$	$\frac{3a6b}{9c}$	$\frac{4a7b}{1c}$	$\frac{5a8b}{2c}$	$\frac{6a9b}{3c}$	$\frac{7a1b}{4c}$	$\frac{8a2b}{5c}$	$\frac{9a3b}{6c}$
$\frac{1a6c}{5b}$	$\frac{2a7c}{6b}$	$\frac{3a8c}{7b}$	$\frac{4a9c}{8b}$	$\frac{5a1c}{9b}$	$\frac{6a2c}{1b}$	$\frac{7a3c}{2b}$	$\frac{8a4c}{3b}$	$\frac{9a5c}{4b}$
$\frac{1a9c}{7b}$	$\frac{2a1c}{8b}$	$\frac{3a2c}{9b}$	$\frac{4a3c}{1b}$	$\frac{5a4c}{2b}$	$\frac{6a5c}{3b}$	$\frac{7a6c}{4b}$	$\frac{8a7c}{5b}$	$\frac{9a8c}{6b}$
$\frac{7b5c}{1a}$	$\frac{8b6c}{2a}$	$\frac{9b7c}{3a}$	$\frac{1b8c}{4a}$	$\frac{2b9c}{5a}$	$\frac{3b1c}{6a}$	$\frac{4b2c}{7a}$	$\frac{5b3c}{8a}$	$\frac{6b4c}{9a}$
$\frac{8b3c}{1a}$	$\frac{9b4c}{2a}$	$\frac{1b5c}{3a}$	$\frac{2b6c}{4a}$	$\frac{3b7c}{5a}$	$\frac{4b8c}{6a}$	$\frac{5b9c}{7a}$	$\frac{6b1c}{8a}$	$\frac{7b2c}{9a}$

28 elever, 7 grupper, 4 i hvert forum

$\frac{2b3c}{1a4d}$	$\frac{3b4c}{2a5d}$	$\frac{4b5c}{3a6d}$	$\frac{5b6c}{4a7d}$	$\frac{6b7c}{5a1d}$	$\frac{7b1c}{6a2d}$	$\frac{1b2c}{7a3d}$
$\frac{4b6c}{1a2d}$	$\frac{5b7c}{2a3d}$	$\frac{6b1c}{3a4d}$	$\frac{7b2c}{4a5d}$	$\frac{1b3c}{5a6d}$	$\frac{2b4c}{6a7d}$	$\frac{3b5c}{7a1d}$
$\frac{1a5d}{2b4c}$	$\frac{2a6d}{3b5c}$	$\frac{3a7d}{4b6c}$	$\frac{4a1d}{5b7c}$	$\frac{5a2d}{6b1c}$	$\frac{6a3d}{7b2c}$	$\frac{7a4d}{1b3c}$
$\frac{1a7d}{3b5c}$	$\frac{2a1d}{4b6c}$	$\frac{3a2d}{5b7c}$	$\frac{4a3d}{6b1c}$	$\frac{5a4d}{7b2c}$	$\frac{6a5d}{1b3c}$	$\frac{7a6d}{2b4c}$

Meget inspiration er fundet i [1]. Alle skemaerne er fundet med den samme metode; den forklares i tilfældet $n = 15$. Det forsøges først at konstruere fora, hvor 2 elever skiftes til at foreside. Beregningerne bliver nemmere, hvis grupperne nummereres 0 til 4. Eleverne betegnes $0a$, $0b$, $0c$, $1a$, … , $4c$. Der stipuleres et udgangspunkt $\frac{0a1b}{rc}$ for runde 1, hvor resten fremgår ved successiv forøgelse af tallene. For de sidste to runder stipuleres udgangspunkter $\frac{0asc}{tb}$ og $\frac{xbyc}{0a}$.

Man kan nu aflæse, at $0a$ er deltager foresiddet af grupperne 1, s, x, y; derfor skal triplen (s, x, y) være en permutation af tallene {2,3,4}.

Det ses, at $0b$ er deltager i fora foresiddet af

$$\{-1, -t, s-t, y-x\} = -\{1, t, t-s, x-y\}$$

alle regnestykker foretaget modulo 5. Tilsvarende fremgår det at $0c$ deltager i fora foresiddet af

$$\{-2, -1, -s, x-y\} = -\{1, 2, s, y-x\}$$

Man lader nu en computer gennemløbe permutationerne givende værdier til s, x, og y. Mest praktisk er det nok at lade en løkke gennemløbe alle værdier af r og t og for hvert par beregne mængderne ovenfor. Hvis begge mængder er lig {1, 2, 3, 4}, printes parametrene. Man finder løsninger og kan så opskrive et skema.

Referencer

[1] Ian Anderson. *Combinatorial Designs and Tournaments.* Oxford University Press, 1997.