

Medianerne - en generalisation

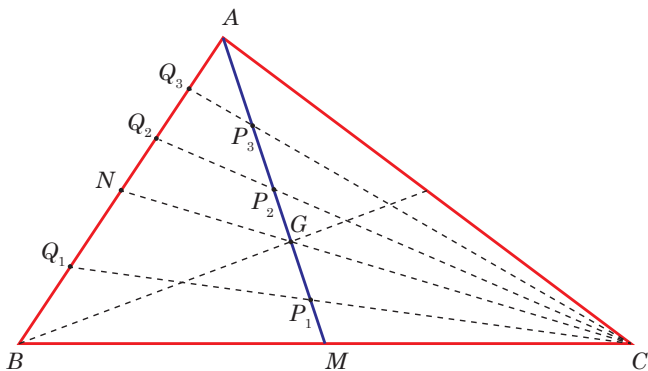
JENS CARSTENSEN, Frederiksberg

I en $\triangle ABC$ gælder som bekendt, at medianernes skæringspunkt G deler hver median i to dele, hvis længdeforhold (regnet fra siden) er 1:2.

Her kommer et par overvejelser, der kunne udgøre et lille projekt inden for ren matematik. Et matematisk eksperiment fører (induktivt) til et 'fornuftigt' gæt. Dette udmøntes derefter i en sætning, der så (selvfølgelig) efterfølges af et deduktivt bevis.

Lad os se på medianen AM fra A og vælg forskellige punkter P_1, P_2, P_3, \dots på denne. Fra en af vinkelspidserne (fx C) trækkes linjer gennem punkterne. Linjerne skærer AB i Q_1, Q_2, Q_3, \dots

Vi er interesserede i sammenhørende delingsforhold på medianen AM og siden AB .



Ved hjælp af en nøjagtig blyantstegning (eller en figur i fx GeoGebra) måler man på figuren, at

$$\frac{MG}{GA} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \frac{BN}{NA} = 1$$

$$\frac{MP_1}{P_1A} = \frac{1}{6} \quad \text{og} \quad \frac{BQ_1}{Q_1A} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{MP_2}{P_2A} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{BQ_2}{Q_2A} = 2$$

$$\frac{MP_3}{P_3A} = 3 \quad \text{og} \quad \frac{BQ_3}{Q_3A} = 6$$

De fleste har nu lugtet lunt: Delingsforholdet på siden ved den angivne konstruktion er det dobbelte af delingsforholdet på medianen. Vi fremsætter altså følgende

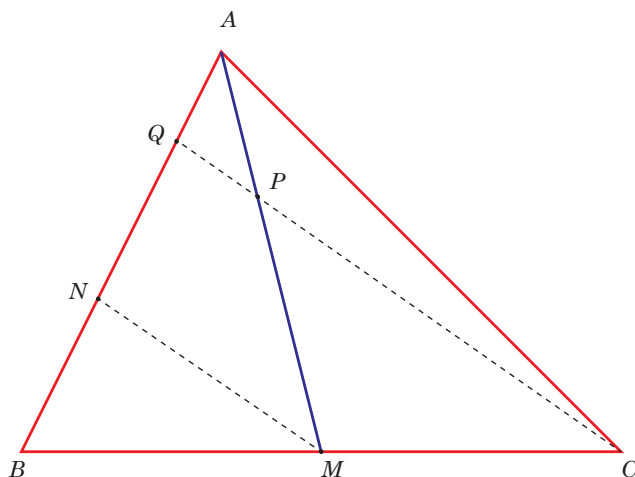
Sætning. Lad P være et vilkårligt punkt på medianen AM i $\triangle ABC$ og lad CP skære AB i Q . Da er det forhold, som Q deler AB i (regnet fra B) dobbelt så stort som det forhold, som P deler AM i (regnet fra siden BC), dvs.

$$\frac{BQ}{QA} = 2 \cdot \frac{MP}{PA}$$

Bevis. En linje gennem M parallel med CQ skærer AB i N . Da MN er midtpunktstransversal i $\triangle BCQ$, er N midtpunkt af BQ , dvs. $NQ = \frac{1}{2} BQ$. I $\triangle ANM$ er $QP \parallel NM$, så

$$\frac{MP}{PA} = \frac{NQ}{QA} \Leftrightarrow \frac{MP}{PA} = \frac{\frac{1}{2} BQ}{QA} \Leftrightarrow \frac{BQ}{QA} = 2 \cdot \frac{MP}{PA}$$

Dermed er det ønskede bevist.



Der skal foruden ovenstående selvfølgelig være klaret en del forudsætninger inden man kan gå i gang. Det er naturligt først at vise, at medianerne går gennem samme punkt. Derefter skal bevises, at medianernes skæringspunkt deler hver median i forholdet 1:2 regnet fra siden. Desuden må afklares, hvad en midtpunktstransversal i trekant er.

Sætningen er en generalisation af sætningen om medianernes delingsforhold, fordi den udtaler sig om delingsforholdene med udgangspunkt i et vilkårligt punkt på medianen.