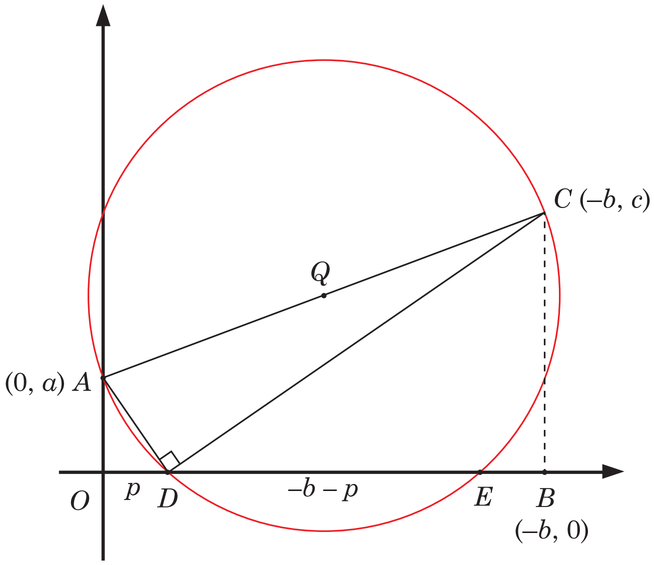
Andengradsligningen – geometrisk løsning

Jens Carstensen, Frederiksberg

Løsning af den sædvanlige andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan lidt usædvanligt anskueliggøres i koordinatsystemet. Vi kan antage, at $a > 0$ og desuden lader vi for nemheds skyld $b < 0$ og $c > 0$.



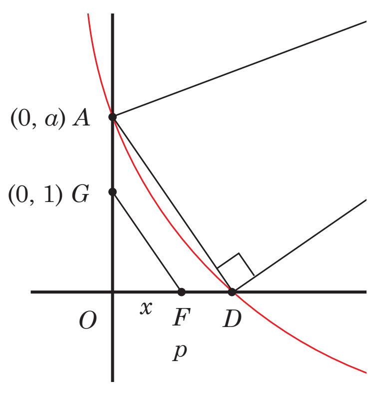
Punkterne $A\,(0, a)$ og $C\,(-b, c)$ afsættes og med AC som diameter tegnes en cirkel, som vi antager skærer x–aksen i to punkter D og E som vist, hvor D ligger nærmest begyndelsespunktet O. Desuden er B projektionen af C på x–aksen.

Hvis vi sætter $OD = p$ er $BD = -b - p$. Da $\angle ADC$ er ret, er ΔOAD og ΔBDC ensvinklede, så

$$\frac{OA}{BD} = \frac{OD}{BC} \Leftrightarrow \frac{a}{-b-p} = \frac{p}{c} \Leftrightarrow ac = -bp - p^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 + bp + ac = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{p}{a}\right)^2 + b \cdot \frac{p}{a} + c = 0$$

Altså er $\frac{p}{a}$ en løsning til ligningen. Læg mærke til, at $\frac{p}{a} = \tan \angle OAD$.



Selve løsningen x hørende til punktet D opnås ved en fjerdeproportionalkonstruktion som vist, idet vi gennem punktet $G = (0,1)$ trækker en linje parallel med AD. Skæringspunktet med x–aksen er F og de ensvinklede trekanter OFG og ODA giver

$$\frac{x}{p} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow x = \frac{p}{a}.$$

Betingelsen for, at cirklen skærer x–aksen i to punkter er, at afstanden fra centrum Q til x–aksen er mindre end radius r. Nu har Q koordinaterne $Q = \left(-\frac{b}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$ og radius er

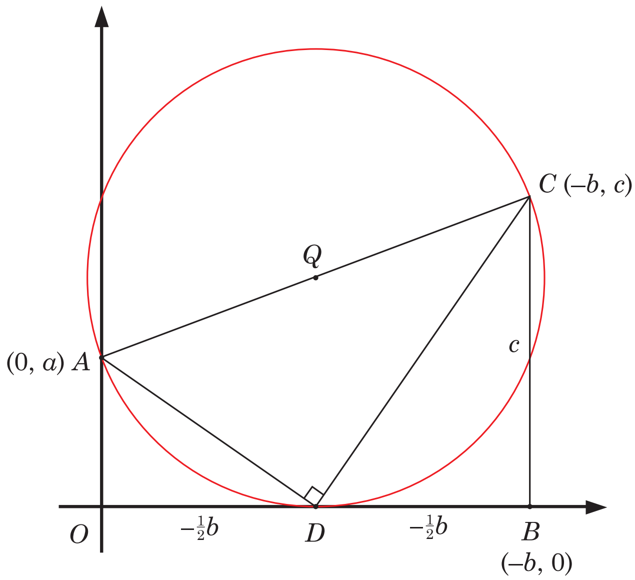
$$r = \tfrac{1}{2} AC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(-b)^2 + (a-c)^2}$$

så vi har, at

$$\tfrac{a+c}{2} < r \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}(a+c)^2 < \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}(a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 < b^2 + (a-c)^2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$$

Som forventet er diskriminanten positiv.

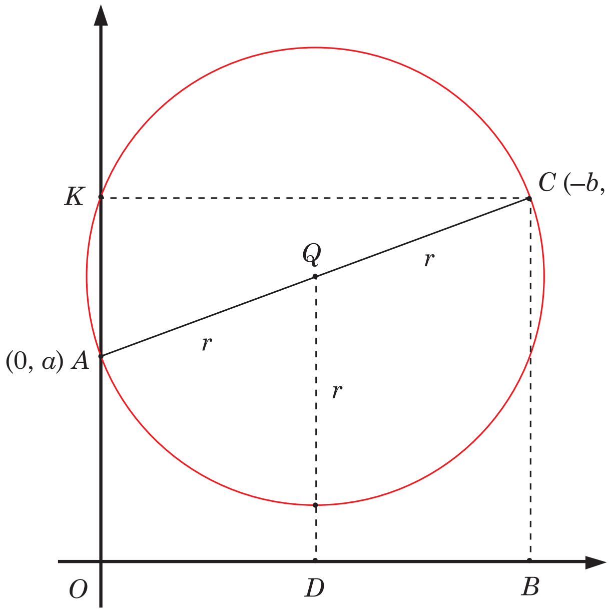


Nu kan det selvfølgelig tænkes, at cirklen netop tangerer x–aksen i punktet D. Så er $OA = a$, $OD = -\frac{b}{2}$, $BD = -\frac{b}{2}$ og $BC = c$. Igen er ΔOAD og ΔBDC ensvinklede, så

$$\frac{OA}{BD} = \frac{OD}{BC} \Leftrightarrow \frac{a}{-\frac{b}{2}} = \frac{-\frac{b}{2}}{c}$$

$$\Leftrightarrow ac = \tfrac{1}{4}b^2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$$

Vi finder altså her, at kriteriet for, at en andengradsligning har præcis en løsning, er at $d = 0$.



Antag til slut, at cirklen ikke rammer x–aksen. Vi får her

$$r < QD \quad \Leftrightarrow \quad r^2 < QD^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac < 0$$

Dette i overensstemmelse med, at ligningen ikke har løsninger netop hvis $d < 0$.

Læg i øvrigt mærke til, at cirklen foruden i punktet A $(0, a)$ skærer y–aksen i punktet K $(0, c)$. Dette skyldes selvfølgelig, at $\angle CKA$ er ret.

Vi kan desuden finde en formel for andengradsligningens eventuelle løsninger ved hjælp af figurerne.

Cirklens ligning er

$$\left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{a+c}{2}\right)^2 = r^2$$

og da

$$2r = AC = \sqrt{(-b)^2 + (c-a)^2}$$

er ligningen

$$\left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{a+c}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}(c-a)^2$$

.

Cirklens mulige skæringspunkter med x–aksen fås ved at sætte $y = 0$:

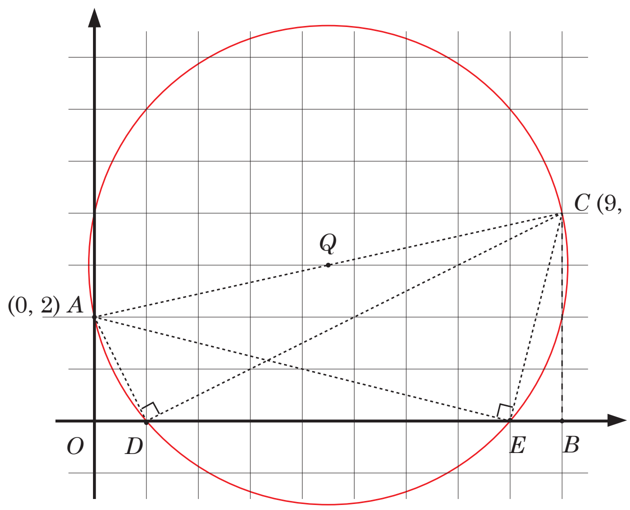
$$\left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a+c}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ac$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - ac = \tfrac{1}{4}d$$

To skæringspunkter med x–aksen opnås, hvis $d > 0$, så

$$x + \tfrac{b}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{d} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2}$$

Her 'mangler' faktoren a i nævneren, og dette korrigeres ved hjælp af fjerdeproportionalkonstruktionen ovenfor.



Som eksempel ser vi på ligningen

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

Cirklens diameter er udspændt af punkterne A $(0, a) = (0, 2)$ og C $(-b, c) = (9, 4)$. Cirklen skærer x–aksen i $(1, 0)$ og $(8, 0)$ svarende til løsningerne $x = \frac{1}{2}$ og $x = 4$.