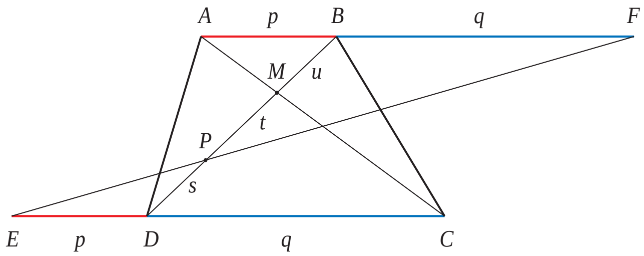
Fup, fejl og fadæser

Jens Carstensen, Frederiksberg & Alija Muminagić, Nykøbing F.

Når man er nået et stykke ind i matematikken, kan man skærpe opmærksomheden om, hvordan visse af reglerne fungerer, ved bevidst at overtræde dem. Neden for angiver vi forskellige fejlslutninger.

Plangeometri

Lad □*ABCD* være et trapez med diagonalerne *AC* og *BD*. Vi kan 'bevise' den absurde påstand, at en diagonal må have en længde på 0.



Vi betegner sidelængderne med $p = AB$ og $q = CD$. Afsæt nu punktet *F* på forlængelsen af *AB*, så $BF = q$ og punktet *E* på forlængelsen af *CD*, så $DE = p$. Træk linjen *EF*. Diagonalerne skærer hinanden i *M* og *EF* skærer *BD* i *P*. Desuden sætter vi $u = BM$, $t = MP$ og $s = PD$.

Da ΔABM og ΔCDM er ensvinklede, er

$$\frac{p}{q} = \frac{u}{s+t}$$

og da ΔPDE og ΔPBF er ensvinklede, er

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t+u}$$

Derefter kan vi regne sådan:

$$\begin{aligned}
&\frac{u}{s+t} = \frac{s}{t+u} \quad \Leftrightarrow \quad u(t+u) = s(s+t) \quad \Leftrightarrow \\
&ut + u^2 = s^2 + st \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - s^2 = st - ut \Leftrightarrow \\
&(u+s)(u-s) = -t(u-s) \quad \Leftrightarrow \\
&u + s = -t \quad \Leftrightarrow \quad s + t + u = 0
\end{aligned}$$

Altså er $BD = s + t + u = 0$.

Det er selvfølgelig ikke svært at se, hvor fejlen i dette 'bevis' ligger.

Potenser

En matematikelev orker ikke at slå potensregnereglerne op. Han regner sådan:

$$n^{\frac{a}{b}} \cdot m^{\frac{c}{d}} = (mn)^{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}} = (mn)^{\frac{a+c}{b+d}}$$

Ikke ganske efter bogen, men faktisk er jo

$$3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{7}{6}} = 27^{\frac{2+7}{3+6}}\,!$$

Potenser indgår desuden i forskellige 'reduktioner'. Vi kan fx blot forkorte eksponenterne bort og får følgende korrekte formel

$$\frac{(a+b)^3 + a^3}{(a+b)^3 + b^3} = \frac{a+b+a}{a+b+b} = \frac{2a+b}{a+2b}\,.$$

Logaritmer

Vi løser ligningen

$$\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0$$

Vi benytter følgende velkendte formel til at skifte grundtal:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

så ligningen er ensbetydende med

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log_x 2x} + \frac{1}{\log_x 8x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{\log_x x + \log_x 2} + \frac{1}{\log_x 8 + \log_x x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{1 + \log_x 2} + \frac{1}{3\log_x 2 + 2} = 0
\end{aligned}$$

For nemheds skyld sætter vi $y = \log_x 2$, så vi skal løse ligningen

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{3y+2} = 0$$

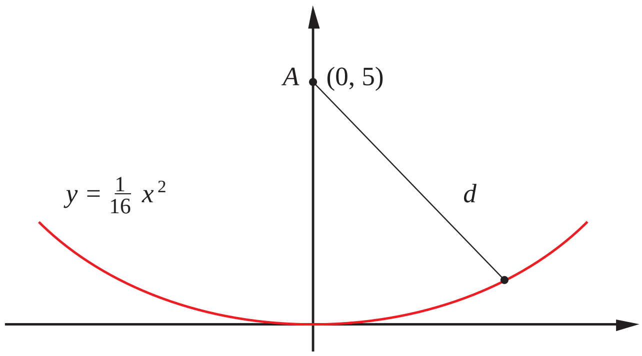
Løsningen er $y = -\frac{3}{4}$, så

$$\begin{aligned}
&\log_x 2 = -\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^{-\frac{3}{4}} = 2 \quad \Leftrightarrow \\
&x = 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}$$

Men vi ser jo allerede fra begyndelsen, at $x = 1$ passer i ligningen. Hvorfor fremkommer den så ikke som løsning i omskrivningerne?

Analytisk geometri

Eksempel 1. Bestem den korteste afstand fra punktet (0, 5) til parablen med ligningen $y = \frac{1}{16}x^2$.



Afstanden d fra punktet (0, 5) til punktet (x, y) på parablen er

$$d^2 = x^2 + (y-5)^2 = 16y + (y-5)^2 = y^2 + 6y + 25$$

Denne funktion af y har et minimum for $y = -3$, hvilket tydeligvis er umuligt. Derfor findes ingen mindste afstand mellem (0, 5) og parablen!

Eksempel 2. For hvilke værdier af a er linjerne med ligningerne

$$ax - 2y + 1 = 0 \quad \text{og} \quad 3x + ay - 1 = 0$$

ortogonale?

Efter metoden fra lærebogen omskriver eleven ligningerne til

$$y = \tfrac{a}{2}x + \tfrac{1}{2} \quad \text{og} \quad y = -\tfrac{3}{a}x + \tfrac{1}{a}$$

Et kriterium for ortogonalitet af linjer er, at produktet af hældningerne er –1, så

$$\tfrac{a}{2} \cdot \tfrac{-3}{a} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{2} = 1 \ (!)$$

Keglesnit

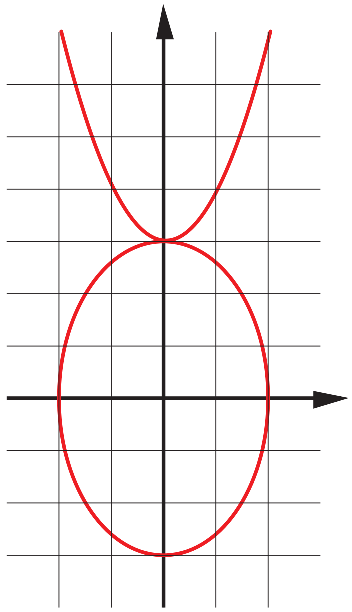
Bestem de værdier af k, for hvilke parablen og ellipsen med ligningerne

$$y = x^2 + 3 \quad \text{og} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

tangerer hinanden.

Vi eliminerer x ved at indsætte den første ligning i den anden:

$$\frac{y-3}{4} + \frac{y^2}{k} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4y^2 + ky - 7k = 0$$



Hvis kurverne skal tangere hinanden, skal denne lignings diskriminant være 0, dvs.

$$k^2 + 112k = 0$$

og da $k \neq 0$, er $k = -112$. En skitse viser dog hurtigt, at $k = 9$ også kan bruges. Hvorfor får vi ikke denne løsning frem?

Eksponentielle ligninger

Vi demonstrerer, hvordan man kan 'løse' ligningen

$$4^x + 2^x = 6$$

hvis eneste løsning tydeligvis er $x = 1$. Der er en række 'smarte' metoder.

1. metode. Division med 2 giver

$$2^x + 1^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x + 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

2. metode. Efter en 'potensregneregel' omskriver vi til

$$(4+2)^x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6^x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

3. metode. Vi bruger en anden 'potensregneregel':

$$2 \cdot 2^x + 2^x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 2^x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

4. metode. Vi omskriver ved hjælp af rødder:

$$\sqrt[x]{4^x + 2^x} = \sqrt[x]{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[x]{4^x} + \sqrt[x]{2^x} = \sqrt[x]{6} \quad \Leftrightarrow$$
$$4 + 2 = \sqrt[x]{6} \quad \Leftrightarrow \quad 6 = \sqrt[x]{6} \quad \Leftrightarrow \quad 6^x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

5. metode. Logaritmer kan også bruges:

$$\log 4^x + \log 2^x = \log 6 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot\log 4 + x\cdot\log 2 = \log 6 \quad\Leftrightarrow$$
$$x(\log 4 + \log 2) = \log 6 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot\log 6 = \log 6 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1$$

I alle tilfælde får vi den korrekte løsning.

Andengradsligningen

Vi har lært at løse visse andengradsligninger med nulreglen:

$$(x-a)(x-b) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = a \;\vee\; x = b$$

Derfor udvider vi nulreglen og regner sådan:

$$(x+3)(2-x) = 4 \quad\Leftrightarrow$$
$$x+3 = 4 \;\vee\; 2-x = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1 \;\vee\; x = -2$$

og disse løsninger er korrekte.

Hvad mon betingelsen er for, at man kan 'løse' ligningen

$$(x+p)(q-x) = r \quad (r \neq 0)$$

på denne måde? Med andre ord: hvordan skal r afhænge af p og q? Vi regner:

$$(x+p)(q-x) = r \quad\Leftrightarrow\quad x+p = r \;\vee\; q-x = r \quad\Leftrightarrow$$
$$x_1 = r-p \;\vee\; x_2 = q-r$$

Hvis disse to tal skal passe i ligningen

$$(x+p)(q-x) = r \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - (q-p)x + r - pq = 0$$

skal deres sum være $q - p$:

$$x_1 + x_2 = r - p + q - r = q - p$$

og dette er opfyldt. Desuden kræves, at produktet af rødderne er lig med ligningens sidste led:

$$x_1 x_2 = r - pq \quad\Leftrightarrow\quad (r-p)(q-r) = r - pq \quad\Leftrightarrow$$
$$r(p+q-r-1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad r = p+q-1$$

Oven for er $p = 3$ og $q = 2$, så $r = 3 + 2 - 1 = 4$.

Vi kan producere lige så mange ligninger af denne type, vi ønsker, fx

$$(x+5)(7-x) = 11 \quad\Leftrightarrow$$
$$x+5 = 11 \;\vee\; 7-x = 11 \quad\Leftrightarrow$$
$$x = 6 \;\vee\; x = -4.$$