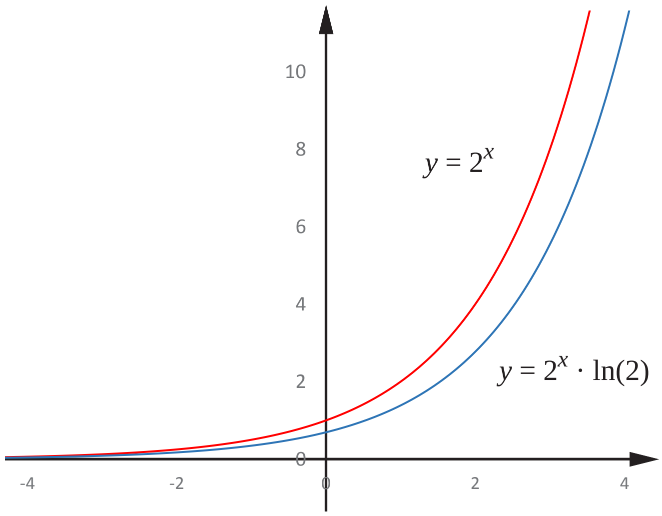
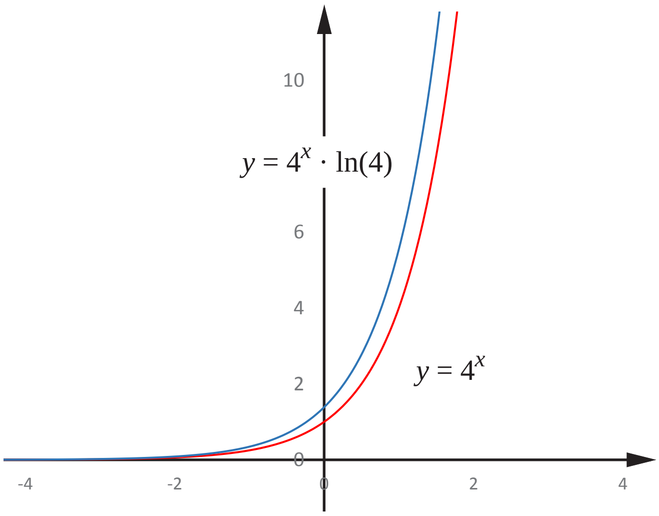
Den naturlige eksponentialfunktion

Jens Carstensen, Frederiksberg og Alija Muminagić, Nykøbing F

Konstanten e indføres normalt som grundtallet for dén eksponentialfunktion $y = a^x$, hvis grafiske billede i punktet (0,1) har en tangent med hældningen 1. Vi viser her, at vi kan illustrere en anden egenskab ved e på en interessant måde.





Funktionerne $f(x) = a^x$ har de afledede $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$. Vi tegner for $a = 2$ og for $a = 4$ i koordinatsystemet graferne for funktionerne og deres afledede, dvs. vi tegner graferne for

$$f(x) = 2^x \quad \text{og} \quad f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$$

og på en anden figur graferne for

$$g(x) = 4^x \quad \text{og} \quad g'(x) = 4^x \cdot \ln(4)$$

Vi ser på figurerne, at grafen for $f'(x)$ ligger helt *under* grafen for $f(x)$, mens grafen for $g'(x)$ ligger helt *over* grafen for $g(x)$.

Skiftet mellem den klasse af funktioner af typen $y = a^x$, hvis afledede har grafer, der ligger *over* grafen for funktionen selv og den klasse, hvis afledede har grafer, der ligger *under*, sker netop for $a = \mathrm{e}$, idet den afledede af $h(x) = \mathrm{e}^x$ er funktionen selv: $h'(x) = \mathrm{e}^x$.

Vi kan desuden foretage en beregning af e ved at tilnærme e med et polynomium af 'uendelig høj' grad (dvs. en potensrække). Vi sætter altså lidt frækt

$$\mathrm{e}^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \ldots \qquad (1)$$

For $x = 0$ får vi $\mathrm{e}^0 = a_0$, dvs. $a_0 = 1$.

Differentiation giver derefter

$$\mathrm{e}^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \ldots \qquad (2)$$

Sammenligning af (1) og (2) giver

$$a_1 = a_0 = 1$$

$$a_2 = \tfrac{1}{2}a_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$3a_3 = a_2 \Leftrightarrow \quad a_3 = \tfrac{1}{3}a_2 = \tfrac{1}{3\cdot 2} = \tfrac{1}{3!}$$

$$4a_4 = a_3 \Leftrightarrow \quad a_4 = \tfrac{1}{4}a_3 = \tfrac{1}{4\cdot 3!} = \tfrac{1}{4!}$$

osv.

Dermed har vi

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

og for $x = 1$ får vi rækken

$$\mathrm{e} = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \cdots$$

Naturligvis har vi ikke taget alle de nødvendige skrupler fra den højere matematik med her. Således mæler vi ikke et ord om konvergens eller om tilladeligheden af ledvis differentiation af uendelige rækker. Men fremmelige gymnasieelever kan sagtens få noget ud af dette alligevel.