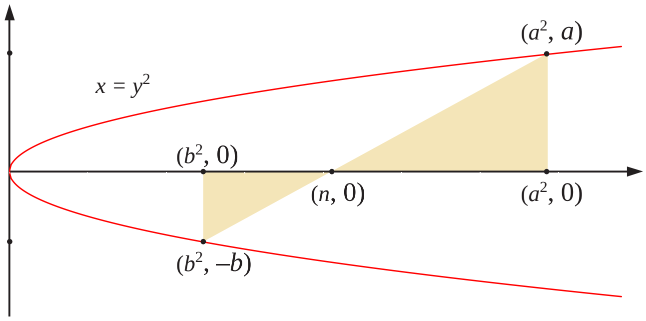
Parabler og primtal

Jens Carstensen, Frederiksberg

Der findes en overraskende sammenhæng mellem en sædvanlig parabel og primtal, idet parablen ligefrem kan fungere som en primtalssi.

Vi ser på parablen med ligningen $x = y^2$ (eller $y = \pm\sqrt{x}$) med graf i 1. og 4. kvadrant. Vi kalder et punkt på parablen *helt*, hvis det har heltallige koordinater. Vi lader a og b være positive hele tal forskellige fra 1 og vælger et helt parabelpunkt over x–aksen, fx (a^2, a) og et helt parabelpunkt under x–aksen, fx $(b^2, -b)$. Da vil forbindelseslinjen mellem de to punkter skære x–aksen i et helt tal.



Dette kan vi indse ved hjælp af ensvinklede trekanter. Idet skæringspunktets koordinater betegnes med $(n, 0)$ har vi nemlig

$$\frac{a}{a^2 - n} = \frac{b}{n - b^2}\ .$$

Dette omskrives til

$$an - ab^2 = a^2b - nb \quad\Leftrightarrow\quad n(a + b) = ab(a + b) \quad\Leftrightarrow\quad n = ab,$$

så n er et helt tal. Desuden er n sammensat, idet vi har forudsat, at $a > 1$ og $b > 1$.

Forbindelseslinjen mellem to hele punkter i hver sit kvadrant på parablen passerer altså gennem et sammensat tal på x–aksen. På figuren er illustreret tilfældet $n = 12$, hvor vi på figurens koordinater ser, at $12 = 3 \cdot 4$ og $12 = 2 \cdot 6$, så der ligefrem er to forbindelseslinjer, der går gennem (12, 0).

Desuden passerer forbindelseslinjen mellem (25, 5) og (16, –4) gennem $5 \cdot 4 = 20$ på x–aksen og forbindelseslinjen mellem (25, 5) og (36, –6) går gennem $5 \cdot 6 = 30$ på x–aksen.

På næste figur er flere forbindelseslinjer trukket. Ingen af dem går gennem 7, 11 og 13 på x–aksen og heller ikke flere forbindelseslinjer vil komme til det. Altså er 7, 11 og 13 'fundet' som primtal. Tallet $14 = 2 \cdot 7$ på x–aksen skæres af forbindelseslinjen mellem punkterne (4, –2) og (49, 7) (og af linjen mellem (49, –7) og (4, 2)), svarende til, at tallet 14 er sammensat.

Henvisning

Paul Stephenson: *Primes by Paper Folding* (Mathematics In School, May 2015, Vol 44, No. 3).