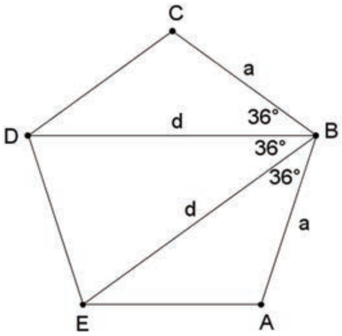
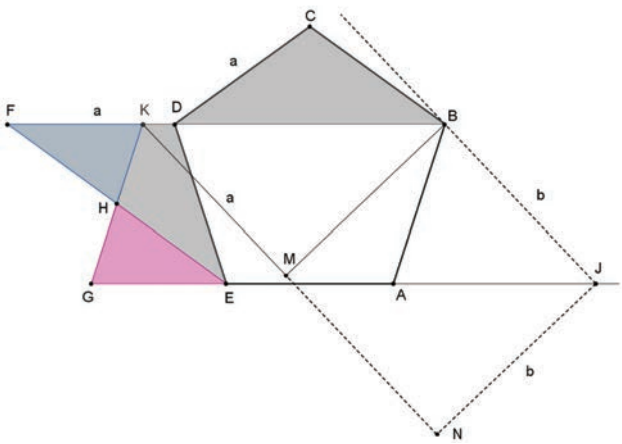
Den regulære femkant og kvadratet

Jens Carstensen, Frederiksberg

I LMFK–Bladet for marts vistes, hvordan et kvadrat og en ligesidet trekant kunne skæres i 4 parvis kongruente stykker, så den ene polygon kunne lægges sammen til den anden. Vi skal her se, hvordan en regulær femkant kan deles i 6 stykker, der kan lægges sammen til et kvadrat. Det er klart, at ituskæringen bliver noget mere kompliceret. Den stammer fra skotten *Robert Brodie* i 1891.



Vi betegner sidelængden i den regulære femkant med a og længden af dens diagonaler med d. Så er $d = 2a \cos 36°$ og femkantens areal T er summen af tre trekanters arealer:



$$
\begin{aligned}
T &= a \cdot d \cdot \sin 36° + \tfrac{1}{2} d^2 \cdot \sin 36° \\
&= d \cdot \sin 36° \cdot (a + \tfrac{1}{2} d) \\
&= 2a \cdot \cos 36° \cdot \sin 36° \cdot (a + a \cdot \cos 36°) \\
&= a^2 \cdot \sin 72° \cdot (1 + \cos 36°) \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\ a^2
\end{aligned}
$$

Sidelængden b i et kvadrat med samme areal som femkantens er altså

$$b \approx a\sqrt{1,7205} = 1,3117\,a$$

På figuren er $ABCDE$ den regulære femkant, der skal skæres op i 6 brikker. Vi forlænger diagonalen BD ud over D til F, så $DF = a$. Så er ΔFDE og ΔBCD kongruente. Lad H være midtpunkt af FE. En linje gennem H parallel med AB skærer DF i K og skærer forlængelen af AE ud over E i G. Så er ΔKFH og ΔGEH kongruente, så der for femkantens areal T gælder, at

$$
\begin{aligned}
T &= [ABDE] + [BCD] \\
&= [ABDE] + [FDE] \\
&= [ABDE] + [KEH] + [KHED] \\
&= [ABDE] + [GEH] + [KHED] \\
&= [ABDE] + [GEDK] \\
&= [GABK]
\end{aligned}
$$

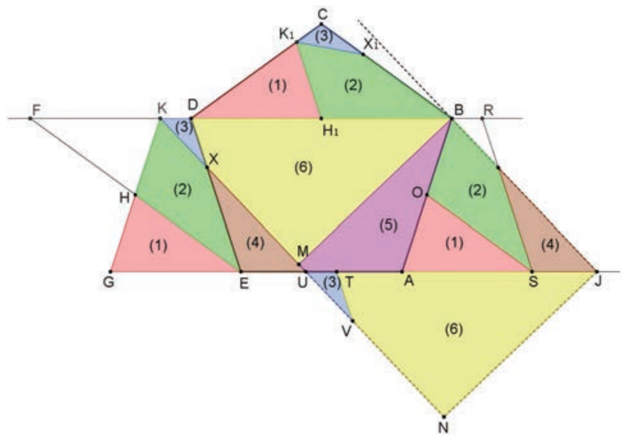
Femkantens areal er altså det samme som arealet af parallelogrammet $GABK$.

Nu afsættes punktet J på forlængelsen af EA ud over A, så $BJ = b$, siden i det kvadrat som har samme areal som femkanten. Kvadratet fuldføres til $BJNM$.

På figuren afsættes R og S på DB og EA, så $BR = KD$ og $AS = GE$. Desuden er O midtpunkt af AB, og NM går gennem K. NM skærer EA i U.

Punktet T afsættes på EA så $UT = KD$ og X er skæringspunkt mellem NM og DE. Endelig er K_1 og X_1 punkter på siderne DC og CB i ΔDCB, som svarer til punkterne K og X i den dermed kongruente ΔFDE.

Vi forsyner de forskellige områder på figuren med betegnelserne (1), (2), . . . , (6) og ser, at disse områder til sammen udgør femkanten, parallelogrammet og kvadratet.



Henvisninger

Greg N. Frederickson: *Dissections: Plane & Fancy* (Cambridge University Press, 1997)
Erik Hjorth: *Dudeney og herreekviperingshandlerens problem* (LMFK–Bladet, marts 2015)
H. E. Dudeney: *Amusements in Mathematics* (Dover Publications, 1958)
H. E. Dudeney: *tænke, tænke, tænke, 333 morsomme opgaver* (Grafisk Forlag, 1949, s. 189)
Jens Carstensen: *Fra regulær femkant til kvadrat* (Matematik-Magasinet 67, s. 2339)
Palle Bak Petersen: *Fra regulær femkant til kvadrat, 2* (Matematik-Magasinet 68, s. 2354)