

har længden $2 \cdot |LJ| = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot a$, som netop var kantlængden af kvadratet med samme areal som trekanten, må firkanten være et kvadrat. Der kan ikke være unøjagtigheder ved sammenføjerne, da alle trekantens vinkelpar med bogstaverne E , D , I og J er supplementvinkler, og trekantens tre vinkler på hver 60° netop giver 180° i punktet inde i kvadratet.

Henvisning nr. 2 nævner en alternativ og meget simple måde at finde opskæringspunkterne på, se nederste figur.

Metoden er imidlertid forkert, idet firkanten så bliver et rektangel med sidelængderne $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot a$ og $\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot a$, som begge afviger ca. 0,5% fra det korrekte $\frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot a$.

Henvisninger

Martin Gardner, *Mere morsom matematik*, Borgens Forlag, 1964.
craftsmanspace.com/free-projects/haberdashers-problem-puzzle-plan.html

Regression med mindste kvadraters metode

JAN AGENTOFT NIELSEN, Rødkilde Gymnasium

I sidste nummer af LMFK viste Carl Windsløw en udledning af formlerne for regressionslinjens hældning og begyndelsesværdi, som ikke kræver kendskab til kritiske punkter for funktioner af to variable. Selvom udledningen ikke bruger avanceret matematik, så vil de fleste elever nok finde den svær.

Min pointe i dette indlæg er, at med kendskab til vektorregning bliver udledningen meget mere elegant og naturlig (altså uden snedige omskrivninger, hvis eneste begrundelse er kendskab til, hvad man skal frem til). Jeg bruger udledningen i min undervisning til at vise eleverne en overraskende kobling mellem to tilsyneladende vidt forskellige emner.

Strategien i udledningen

1. Tving regressionslinjen gennem $(0, 0)$ (også kaldt proportionalitetsregression).
2. Tving regressionslinjen gennem et vilkårligt punkt (x_0, y_0) .
3. Indse, at gennemsnitspunktet $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sum y_i}{n} \right)$ ligger på regressionslinjen og brug formlen fra trin 2.

Argumenterne i hvert skridt er følgende:

Trin 1 – At minimere kvadratsummen svarer til at finde den konstant, a , så $\| \mathbf{y} - a\mathbf{x} \|^2$ er mindst mulig, hvor \mathbf{x} og \mathbf{y} er vektorerne med hhv. x - og y -koordinaterne til punkterne som koordinater. Det betyder, at $a\mathbf{x}$ er projektionen af \mathbf{y} på \mathbf{x} , hvormed

$$a = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}.$$

Trin 2 – Forskyd alle punkter x_0 til venstre og y_0 ned, så (x_0, y_0) ender i $(0, 0)$ og (x_i, y_i) ender i $(x_i - x_0, y_i - y_0)$ og brug så formlen fra 1:

$$a = \frac{\sum (x_i - x_0)(y_i - y_0)}{\sum (x_i - x_0)^2}$$

Trin 3 – Da kvadratsummen er lig med $\| \mathbf{y} - (a\mathbf{x} + b\mathbf{1}) \|^2$, er $b\mathbf{1}$ projektionen af $\mathbf{y} - a\mathbf{x}$ på $\mathbf{1}$, hvormed

$$b = \frac{(\mathbf{y} - a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}} = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$$

hvilket viser, at (\bar{x}, \bar{y}) ligger på regressionslinjen.

Ved indsættelse i formlen fra trin 2, får vi:

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

I *Matematikkens Elementer* har jeg skrevet en elevvenlig introduktion, som er rigt illustreret med dynamiske figurer og øvelser, som lader eleverne eksperimentere sig frem til en forståelse af regression og forklaringsgraden. Introduktionen kan sagtens bruges i 1.g.

Kilde

Matematikkens Elementer, www.mat-A.dk.