Dudeney og herreekviperingshandlerens problem
– the Haberdasher's Puzzle

Erik Hjorth, Viborg Katedralskole

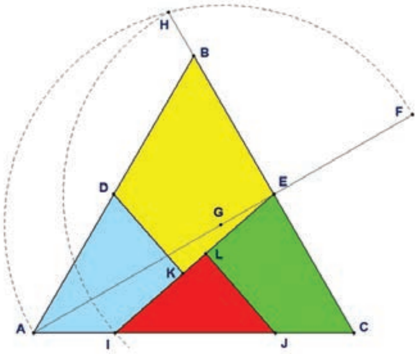
Henry Ernest Dudeney (1857–1930) var Englands største problemmager. I sin første bog *The Canterbury Puzzles* (1907) præsenterede han sit mest berømte geometriske problem: At dele en ligesidet trekant i fire dele, som lader sig lægge sammen til et kvadrat.

Løsning

Hvis vi sætter sidelængden i den ligesidede trekant til a, vil dens areal være

$$½\cdot a\cdot a\cdot\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$$

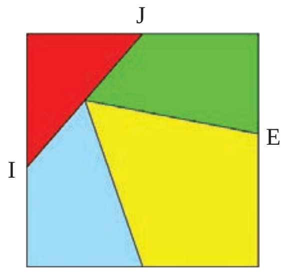
og kvadratets kantlængde må så være kvadratroden heraf, altså $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\cdot a$. Med 3 snit skæres den ligesidede ΔABC i 4 stykker som vist herunder.



Punkterne bestemmes således

1. Siden AB halveres ved D, og siden BC halveres ved E.
2. Linjestykket AE forlænges til F, således at $|EF| = |EB|$.
3. AF halveres ved G, og med G som centrum tegnes halvcirklen AHF.
4. Linjestykket EB forlænges til skæring med halvcirklen i H.
5. Med E som centrum og $|EH|$ som radius tegnes en bue, som skærer linjestykket AC i I.
6. Tegn linjen IE.
7. Afsæt punktet J, således at $|IJ| = |BE|$.
8. Fra D og J tegnes linjer vinkelret ned på IE for at få punkterne K og L.

Nu kan de fire stykker klippes ud og samles til et kvadrat som vist til højre.



Det særligt bemærkelsesværdige ved denne deling er, at hvis stykkerne anbringes i rækkefølgen gul, grøn, rød, blå og hængsles i hjørnerne E, J og I, vil denne kæde danne trekanten, hvis den lukkes den ene vej rundt, mens den ved sammenlukning den anden vej rundt vil danne kvadratet. Dudeney fik fremstillet en model i mahogni med messinghængsler til brug ved en demonstration af problemet for Royal Society.

Beregning af sider og vinkler i ΔABC

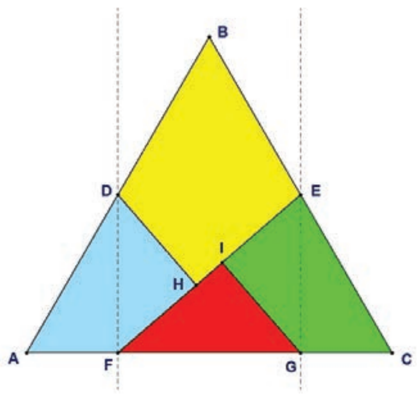
AE er en højde i ΔABC, og derfor er

$$|AE| = |AB|\cdot\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$$

$$|AF| = |AE| + |EF| = |AE| + |EB|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot a$$

$$|AG| = \frac{|AF|}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}\cdot a = |GH|$$



1. Draw an equilateral triangle with points A, B and C
2. Bisect AB at D and BC at E.
3. Draw the perpendicular lines from D and E on the side AC.
4. Determine the intersection points F and G on the side AC
5. Draw the line EF.
6. Draw the perpendiculars from D and G to this segment and determine the intersection points H and I.

$$|EG| = |AE| - |AG|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a - \frac{\sqrt{3}+1}{4}\cdot a = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\cdot a$$

Pythagoras på ΔGHE:

$$|EH| = \sqrt{|GH|^2 - |GE|^2}$$

$$= a\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2}$$

$$= a\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\cdot a = |EI|$$

Sinusrelationen på ΔAEI:

$$\frac{\sin(\angle AIE)}{|AE|} = \frac{\sin(30^\circ)}{|EI|}\text{, dvs.}$$

$$\sin(\angle AIE) = \frac{|AE|}{|EI|}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a}{\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\cdot a}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$$

Da $\sin(180^\circ - v) = \sin(v)$, er

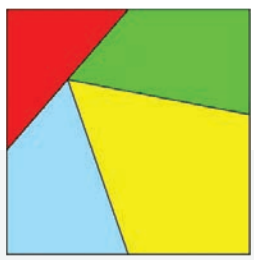
$$\sin(\angle LIJ) = \sin(\angle AIE) = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$$

$|LJ|$ fås af ΔLIJ til:

$$|LJ| = |IJ|\cdot\sin(\angle LIJ)$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4}\cdot a$$

For at indse, at firkanten virkelig er et kvadrat, kan man se, at alle fire hjørner er 90º, så firkanten er et rektangel. Da øverste kant



har længden $2 \cdot |LJ| = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \cdot a$, som netop var kantlængden af kvadratet med samme areal som trekanten, må firkanten være et kvadrat. Der kan ikke være unøjagtigheder ved sammenføjningerne, da alle trekantens vinkelpar med bogstaverne *E*, *D*, *I* og *J* er supplementvinkler, og trekantens tre vinkler på hver 60º netop giver 180º i punktet inde i kvadratet.

Henvisning nr. 2 nævner en alternativ og meget simplere måde at finde opskæringspunkterne på, se nederste figur.

Metoden er imidlertid forkert, idet firkanten så bliver et rektangel med sidelængderne $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot a$ og $\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot a$, som begge afviger ca. 0,5% fra det korrekte $\frac{\sqrt[4]{3}}{2} \cdot a$.

Henvisninger

Martin Gardner, *Mere morsom matematik*, Borgens Forlag, 1964.

craftsmanspace.com/free-projects/haberdashers-problem-puzzle-plan.html

Regression med mindste kvadraters metode

Jan Agentoft Nielsen, Rødkilde Gymnasium

I sidste nummer af LMFK viste Carl Windsløw en udledning af formlerne for regressionslinjens hældning og begyndelsesværdi, som ikke kræver kendskab til kritiske punkter for funktioner af to variable. Selvom udledningen ikke bruger avanceret matematik, så vil de fleste elever nok finde den svær.

Min pointe i dette indlæg er, at med kendskab til vektorregning bliver udledningen meget mere elegant og naturlig (altså uden snedige omskrivninger, hvis eneste begrundelse er kendskab til, hvad man skal frem til). Jeg bruger udledningen i min undervisning til at vise eleverne en overraskende kobling mellem to tilsyneladende vidt forskellige emner.

Strategien i udledningen

1. Tving regressionslinjen gennem (0, 0) (også kaldt proportionalitetsregression).
2. Tving regressionslinjen gennem et vilkårligt punkt (x_0, y_0).
3. Indse, at gennemsnitspunktet $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sum y_i}{n} \right)$ ligger på regressionslinjen og brug formlen fra trin 2.

Argumenterne i hvert skridt er følgende:

Trin 1 – At minimere kvadratsummen svarer til at finde den konstant, *a*, så $\| \boldsymbol{y} - a\boldsymbol{x} \|^2$ er mindst mulig, hvor $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ er vektorerne med hhv. *x*– og *y*–koordinaterne til punkterne som koordinater. Det betyder, at $a\boldsymbol{x}$ er projektionen af $\boldsymbol{y}$ på $\boldsymbol{x}$, hvormed

$$a = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}.$$

Trin 2 – Forskyd alle punkter x_0 til venstre og y_0 ned, så (x_0, y_0) ender i (0,0) og (x_i, y_i) ender i $(x_i - x_0, y_i - y_0)$ og brug så formlen fra 1:

$$a = \frac{\sum (x_i - x_0)(y_i - y_0)}{\sum (x_i - x_0)^2}$$

Trin 3 – Da kvadratsummen er lig med $\| \boldsymbol{y} - (a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{1}) \|^2$, er $b\boldsymbol{1}$ projektionen af $\boldsymbol{y} - a\boldsymbol{x}$ på $\boldsymbol{1}$, hvormed

$$b = \frac{(\boldsymbol{y} - a\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}^2} = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$$

hvilket viser, at $(\bar{x}, \bar{y})$ ligger på regressionslinjen.

Ved indsættelse i formlen fra trin 2, får vi:

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

I *Matematikkens Elementer* har jeg skrevet en elevvenlig introduktion, som er rigt illustreret med dynamiske figurer og øvelser, som lader eleverne eksperimentere sig frem til en forståelse af regression og forklaringsgraden. Introduktionen kan sagtens bruges i 1.g.

Kilde

Matematikkens Elementer, www.mat-A.dk.