$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (8-\sqrt{71})(8+\sqrt{71}) = -7$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
(-7)^n &= \alpha^n \cdot \overline{\alpha}^n \\
&= (A_n - B_n\sqrt{71}) \cdot (A_n + B_n\sqrt{71}) \\
&= A_n^2 - 71B_n^2 \\
&= \Delta_n
\end{aligned}$$

Afvigelsen findes dernæst ved følgende udregning:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{71} - \frac{A_n}{-B_n}\right| &= \left|\frac{\alpha^n}{B_n}\right| \\
&= \left|\frac{(-7)^n}{\overline{\alpha}^n B_n}\right| \\
&= \frac{(7)^n}{\overline{\alpha}^n(-B_n)} \\
&\approx \frac{(7)^n \cdot 2\sqrt{71}}{(\overline{\alpha}^n)^2} \\
&= 2\sqrt{71} \cdot \left(\frac{7}{\overline{\alpha}^2}\right)^n \\
&\approx 17 \cdot \left(\frac{1}{38}\right)^n
\end{aligned}$$

For hver iteration bliver afvigelsen altså formindsket med en faktor 38.

Vi kan samle det hele i følgende tabel:

n	A_n	B_n	Δ_n	$\frac{A_n}{-B_n}$
1	8	−1	−7	8,0000
2	135	−16	49	8,4375
3	2216	−263	−343	8,4259

Decimalbrøken for $\sqrt{71}$ er 8,4261, så allerede for $n = 3$ er der fire korrekte cifre (med afrunding).

Konklusion

Den abstrakte algebra i matematik giver nogle værktøjer, som kan bruges til systematisk at bestemme brøker som approksimationer til kvadratrødder.

Mere om lineær regression

Sven Erik Morsing, Kongens Lyngby

Jeg vil gerne tage tråden op fra artiklen af Carl Winsløw, *Fodgængerversion af lineær regression* i LMFK–bladet, 2015 nr. 1. Ved at ændre lidt på valget af parametre mener jeg, vi opnår at få et lidt lettere regnearbejde, samtidig med at ideen måske er lidt tættere på vores intuition. Endelig vil jeg påpege en tilgang, der giver en genvej – måske til glæde for den almindelige elev – en rollatorversion.

Der er blot tale om nogle småændringer, hvorfor jeg vil lægge mig så tæt op ad Winsløws fremstilling som muligt og derfor så vidt muligt benytte de samme variabelnavne som i ovennævnte artikel.

Til et datasæt $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, hvor ikke alle x_k er ens, søges den bedste lineære sammenhæng $y = ax + b$, geometrisk set den bedste rette linje. Varieres parameteren b, parallelforskydes linjen lodret. Varieres a, drejes linjen om punktet $(0, b)$, et punkt, der sagtens kan ligge meget langt uden for de givne punkter. Dette er således et noget arbitrært omdrejningspunkt, hvorfor et mere oplagt punkt at dreje om vil være et punkt i nærheden af det centrale punkt $(\overline{x}, \overline{y})$, tyngdepunktet eller centrum. Hér er $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ og $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Vi vil derfor i stedet for den sædvanlige sammenhæng $y = ax + b$ benytte

$$y = a(x - \overline{x}) + b$$

eller

$$y = a(x - \overline{x}) + (\overline{y} + c),$$

hvor $c = b - \overline{y}$. Vi vælger altså et omdrejningspunkt, ikke på y–aksen, men på den lodrette linje med ligningen $x = \overline{x}$, *in casu* punktet $(\overline{x}, \overline{y} + c)$.

Vi parametriserer a og c og skal altså bestemme parametrene α og γ, så kvadratsummen

$$S(\alpha,\gamma)=\sum_{k=1}^{n}(y_k-(\alpha(x_k-\overline{x})+\overline{y}+\gamma))^2$$

bliver mindst mulig.

Vi indfører nogle hjælpestørrelser.

$$z_k=x_k-\overline{x}\quad\text{og}\quad w_k=y_k-\overline{y},$$
$$A=\sum_{k=1}^{n}z_k^2,\quad B=\sum_{k=1}^{n}w_kz_k\quad\text{og}\quad C=\sum_{k=1}^{n}w_k^2.$$

Det følger, at

$$\sum_{k=1}^{n}z_k=0\quad\text{og}\quad\sum_{k=1}^{n}w_k=0.$$

Herefter kan vi regne videre således:

$$\begin{aligned}S(\alpha,\gamma)&=\sum_{k=1}^{n}((y_k-\overline{y})-\alpha(x_k-\overline{x})-\gamma))^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(w_k-\alpha z_k-\gamma))^2\\&=\sum_{k=1}^{n}w_k^2+\alpha^2\sum_{k=1}^{n}z_k^2+\sum_{k=1}^{n}\gamma^2\\&\quad-2\alpha\sum_{k=1}^{n}w_kz_k+2\alpha\gamma\sum_{k=1}^{n}z_k-2\gamma\sum_{k=1}^{n}w_k\\&=C+\alpha^2A+n\gamma^2-2\alpha B+0-0\\&=\alpha^2A-2\alpha B+C+n\gamma^2,\end{aligned}$$

som er et andengradspolynomium i α, hvor A, B og C er konstanter med $A>0$. I et minimum må γ nødvendigvis være 0. Det viser, at linjen faktisk går gennem centrum!

Tilbage har vi

$$S(\alpha,0)=\alpha^2A-2\alpha B+C,$$

der har minimum for

$$\alpha=\frac{B}{A}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})(x_k-\overline{x})}{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2},$$

og med denne værdi for a er den endelige ligning

$$y=a(x-\overline{x})+\overline{y}.$$

En genvej

Var ovenstående en fodgængerversion, må det følgende være rollatorversionen. Man kunne vælge den præmis, at *man kan vise*, at den bedste rette linje går gennem centrum $(\overline{x},\overline{y})$ af punkterne, hvilket jeg tror, de fleste elever vil stille sig tilfreds med. Rent intuitivt virker det sandsynligt. Der vil så kun være én parameter at variere på, nemlig hældningen α. Det vil være overkommeligt for de fleste.

Vi tager derfor udgangspunkt i ligningen

$$y=\overline{y}+a(x-\overline{x})$$

og skal nu forsøge at minimere funktionen

$$S(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y}-\alpha(x_k-\overline{x}))^2.$$

Vi omskriver denne kvadratsum:

$$\begin{aligned}S(\alpha)&=\sum_{k=1}^{n}((y_k-\overline{y})-\alpha(x_k-\overline{x}))^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2+\alpha^2\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2\\&\qquad-2\alpha\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})(x_k-\overline{x})\\&=C+\alpha^2A-2\alpha B,\end{aligned}$$

hvor A, B og C er konstanter med $A>0$. Det er nu en elementær sag at finde den værdi af α, der gør udtrykket mindst, nemlig

$$\alpha=\frac{B}{A}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})(x_k-\overline{x})}{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}.$$

Naturligvis den samme værdi som fundet før.

Proportionalitet

Søges den bedste proportionalitet $y=ax$, skal vi minimere

$$\begin{aligned}S(\alpha)&=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\alpha x_k)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}y_k^2+\alpha^2\sum_{k=1}^{n}x_k^2-2\alpha\sum_{k=1}^{n}y_kx_k,\end{aligned}$$

der har minimum for

$$\alpha=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

Denne metode findes ikke normalt på de gængse hjælpemidler. Dog er tæller og nævner separat til rådighed.