Hvad er kvadratroden af 2?
– eller hvad kan man bruge abstrakt algebra til?

Michael Jørgensen

Indledning

Kvadratroden af 2 kan *ikke* skrives som en brøk. Det vidste Pythagoras allerede. Så spørgsmålet er, hvordan regner man så ud, hvad kvadratroden af 2 er, hvis man kun kender til almindelige brøker?

Der findes brøker, som kommer meget tæt på, fx $\frac{41}{29}$. Med andre ord: $\left(\frac{41}{29}\right)^2 \approx 2$ eller $41^2 \approx 2 \cdot 29^2$. Vi kan således verificere, at $41^2 = 1681$ og $29^2 = 841$. Og da $841 \cdot 2 = 1682 \approx 1681$, så konkluderer vi, at $\frac{41}{29} \approx \sqrt{2}$. Hvis vi regner det ud som decimaltal, så får vi følgende sammenligning: $\sqrt{2} \approx 1,4142$ og $\frac{41}{29} \approx 1,4138$.

Findes der andre brøker, som er tæt på $\sqrt{2}$? Hvordan kan vi finde frem til dem?

Første forsøg

I det følgende prøver vi således at finde to tal *A* og *B*, således at $\frac{A}{B} \approx \sqrt{2}$. I eksemplet fra før havde vi altså $A = 41$ og $B = 29$.

Vi prøver derfor med forskellige værdier af *B*, og udregner $B \cdot \sqrt{2}$, dvs $B \cdot 1,4142$, og finder *A* som det nærmeste heltal. Derudover udregner vi også forskellen $\Delta = A^2 - 2B^2$. Det giver følgende tabel:

B	$B \cdot \sqrt{2}$	A	Δ
1	1,4142	1	−1
2	2,8284	3	1
3	4,2426	4	−2
4	5,6569	6	4
5	7,0711	7	−1

Her ser vi allerede, at for $B = 1$, $B = 2$ og $B = 5$ er forskellen Δ mindst mulig, nemlig 1 eller −1. Det specielle ved Δ er nemlig, at det vil altid være et heltal (fordi *A* og *B* er heltal), og kan ikke være nul (fordi så ville $\left|\frac{A}{B}\right|$ være præcis lig med $\sqrt{2}$).

Findes der mon andre værdier af *B*, hvor Δ er enten plus eller minus en?

En smartere metode

Ulempen ved den forrige metode er, at vi skal kende decimalbrøken for $\sqrt{2}$ på forhånd, og det var netop det vi ville komme frem til!

Der findes en smart metode til at finde frem til brøker tæt på $\sqrt{2}$, og som ikke kræver kendskab til decimalbrøken for $\sqrt{2}$. Metoden bygger på abstrakt algebra.

Vi betragter mængden *M*, som består af alle tal på formen $A + B \cdot \sqrt{2}$, hvor *A* og *B* er heltal (positive eller negative). Det tekniske navn for sådan en mængde er *kvadratisk heltalsring* og mængden beskrives normalt med symbolet $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Et af resultaterne fra den abstrakte algebra siger så, at hvis α og β er to vilkårlige elementer i denne mængde, så gælder der om følgende tal: $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ og $\frac{\alpha}{\beta}$, at de alle også er elementer i mængden. Den tekniske betegnelse for denne egenskab er, at *mængden M er lukket overfor de fire regneoperationer*.

Lad os se på et eksempel: Vi vælger $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ og $\beta = 4 + 5\sqrt{2}$. Nu vil vi vise, at tallet $\alpha \cdot \beta$ også er et element i mængden, dvs. at det også kan skrives på formen $A + B \cdot \sqrt{2}$, hvor *A* og *B* begge skal være heltal. Vi udregner derfor:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= (3 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + 5\sqrt{2}) \\
&= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot 4 - 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \\
&= 12 + 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 10(\sqrt{2})^2 \\
&= 12 + 7\sqrt{2} - 10 \cdot 2 \\
&= -8 + 7\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Dvs. her er $A = -8$ og $B = 7$. Pointen er, at denne omskrivning vil gå godt hver gang, uanset hvordan α og β vælges. Heraf følger også, at α^n er et element i mængden, for ethvert $n = 0,1,2,\ldots$.

Man definerer også operationen *konjugation* på følgende måde: Hvis $\alpha = A + B \cdot \sqrt{2}$ så definerer vi $\overline{\alpha} = A - B \cdot \sqrt{2}$. Der gælder så følgende regneregel: $\left(\overline{\alpha}\right)^n = \overline{\alpha^n}$, som vi får brug for senere.

Vi vælger nu at undersøge elementet $\alpha = 1 - \sqrt{2}$. Dvs. her er $A = 1$ og $B = -1$. Den ovenstående teori siger således, at $\alpha^n = A_n + B_n \cdot \sqrt{2}$, hvor A_n og B_n er heltal, som afhænger af potensen *n*.

Vi ved, at $\alpha \approx -0,4142$, og fordi $-1 < \alpha < 1$ må vi have, at $\alpha^n \to 0$ for $n \to \infty$. Med andre ord, for *n* stor må vi have $A_n + B_n \cdot \sqrt{2} \approx 0$, hvilket kan omskrives til $\sqrt{2} \approx \frac{A_n}{-B_n}$. Dermed kan vi bruge A_n og B_n til at danne en brøk tæt på 2.

Matematik

Beregning af A_n og B_n

Tilbage er nu spørgsmålet om, hvordan man finder frem til A_n og B_n. Vi kan finde frem til en *rekursionsformel* på følgende måde:

$$\begin{aligned} A_{n+1}+B_{n+1}\cdot\sqrt{2} &= \alpha^{n+1} \\ &= \alpha^n\cdot\alpha \\ &= (A_n+B_n\cdot\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2}) \\ &= A_n+B_n\cdot\sqrt{2}-A_n\cdot\sqrt{2}-B_n\cdot(\sqrt{2})^2 \\ &= (A_n-2B_n)+(B_n-A_n)\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Heraf aflæser vi følgende formler:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n-2B_n \\ B_{n+1} &= B_n-A_n \end{aligned}$$

For at bruge disse formler, så skal vi bare kende A_1 og B_1, men dem har vi allerede: $A_1 = 1$ og $B_1 = -1$, fordi $\alpha = 1-\sqrt{2}$. Så kan vi danne følgende tabel, hvor vi igen har tilføjet en kolonne med forskellen $\Delta_n = A_n^2-2B_n^2$:

n	A_n	B_n	Δ_n	$\frac{A_n}{-B_n}$
1	1	−1	−1	1,0000
2	3	−2	1	1,5000
3	7	−5	−1	1,4000
4	17	−12	1	1,4167
5	41	−29	−1	1,4138

For $n = 5$ genkender vi brøken $\frac{41}{29}$ fra indledningen. Vi lægger også mærke til, at forskellen Δ_n er plus eller minus 1 hver gang. Gælder det mon hver gang?

Hvor god er denne metode?

Indtil videre har vi kun det kvalitative argument, at $\alpha^n \approx 0$. Vi vil nu finde en kvantitativ beskrivelse af præcisionen. For at gøre det får vi brug for det konjugerede element $\overline{\alpha} = 1+\sqrt{2}$, og vi udregner produktet af α og $\overline{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \alpha\cdot\overline{\alpha} &= (1-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2}) \\ &= 1+\sqrt{2}-\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Vi har altså, at $\alpha\cdot\overline{\alpha} = -1$. Nu opløfter vi begge sider til potensen n: $\alpha^n\cdot(\overline{\alpha})^n = (-1)^n$. Pointen er nu, at vi kan udregne venstresiden på følgende måde:

$$\begin{aligned} \alpha^n\cdot\overline{\alpha}^n &= (A_n+B_n\sqrt{2})\cdot(A_n-B_n\sqrt{2}) \\ &= A_n^2-2B_n^2 \\ &= \Delta_n \end{aligned}$$

Vi har således bevist, at for alle n gælder, at $A_n^2-2B_n^2 = (-1)^n$. Altså gælder det hver gang, at forskellen mellem A_n^2 og $2B_n^2$ er den mindst mulige, nemlig plus eller minus 1.

Estimering af afvigelse

Vi vil nu gerne have et estimat på afvigelsen $\left|\sqrt{2}-\frac{A_n}{-B_n}\right|$. Ved at dividere relationen $\alpha^n = A_n+B_n\sqrt{2}$ med B_n finder vi:

$$\sqrt{2}-\frac{A_n}{-B_n} = \frac{\alpha^n}{B_n}$$

Spørgsmålet er nu, hvor hurtigt vokser B_n? For at finde ud af det, så kigger vi på det konjugerede element: $\overline{\alpha}^n = A_n-B_n\sqrt{2}$. Heri indsætter vi approksimationen $A_n \approx -\sqrt{2}B_n$, og vi får altså:

$\overline{\alpha}^n \approx -2\sqrt{2}B_n$. Endvidere har vi, at $\alpha^n = \frac{(-1)^n}{\overline{\alpha}^n}$.

Sættes det hele sammen får vi således

$$\sqrt{2}-\frac{A_n}{-B_n} \approx \frac{(-1)^n\cdot 2\sqrt{2}}{(\overline{\alpha}^n)^2}$$

Dermed har vi fundet følgende estimat for afvigelsen:

$$\left|\sqrt{2}-\frac{A_n}{-B_n}\right| \approx 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\overline{\alpha}^2}\right)^n$$

Vi kan udregne $\overline{\alpha}^2 = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} \approx 5,8$. Endvidere er $2\sqrt{2} \approx 2,8$. Dermed bliver det endelige resultat:

$$\left|\sqrt{2}-\frac{A_n}{-B_n}\right| \approx 2,8\cdot\left(\frac{1}{5,8}\right)^n$$

For hver iteration bliver afvigelsen dermed formindsket med en faktor 5,8.

Hvad med andre kvadratrødder?

Metoden kan bruges til at bestemme kvadratroden af alle heltal. Som eksempel kigger vi nu på $\sqrt{71}$. Dvs vi skal bruge mængden $\mathbb{Z}[\sqrt{71}]$, som består af alle tal på formen $A+B\sqrt{71}$, med A og B heltal.

Når vi skal vælge det specifikke element α, så er det vigtigt, at $-1 < \alpha < 1$. Derfor sætter vi $A = 8$ og $B = -1$, således at $\alpha = 8-\sqrt{71}$. Så udregner vi:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= (A_n+B_n\sqrt{71})\cdot(8-\sqrt{71}) \\ &= 8A_n-A_n\sqrt{71}+8B_n\sqrt{71}-71B_n \\ &= (8A_n-71B_n)+(8B_n-A_n)\sqrt{71} \end{aligned}$$

Dermed har vi følgende rekursionsformler:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 8A_n-71B_n \\ B_{n+1} &= 8B_n-A_n \end{aligned}$$

For at vurdere nøjagtigheden, skal vi først udregne

$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (8-\sqrt{71})(8+\sqrt{71}) = -7$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}(-7)^n &= \alpha^n \cdot \bar{\alpha}^n \\ &= (A_n - B_n\sqrt{71})\cdot(A_n + B_n\sqrt{71}) \\ &= A_n^2 - 71B_n^2 \\ &= \Delta_n\end{aligned}$$

Afvigelsen findes dernæst ved følgende udregning:

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{71} - \frac{A_n}{-B_n}\right| &= \left|\frac{\alpha^n}{B_n}\right| \\ &= \left|\frac{(-7)^n}{\bar{\alpha}^n B_n}\right| \\ &= \frac{(7)^n}{\bar{\alpha}^n(-B_n)} \\ &\approx \frac{(7)^n \cdot 2\sqrt{71}}{(\bar{\alpha}^n)^2} \\ &= 2\sqrt{71}\cdot\left(\frac{7}{\bar{\alpha}^2}\right)^n \\ &\approx 17\cdot\left(\frac{1}{38}\right)^n\end{aligned}$$

For hver iteration bliver afvigelsen altså formindsket med en faktor 38.

Vi kan samle det hele i følgende tabel:

n	A_n	B_n	Δ_n	$\frac{A_n}{-B_n}$
1	8	−1	−7	8,0000
2	135	−16	49	8,4375
3	2216	−263	−343	8,4259

Decimalbrøken for $\sqrt{71}$ er 8,4261, så allerede for $n = 3$ er der fire korrekte cifre (med afrunding).

Konklusion

Den abstrakte algebra i matematik giver nogle værktøjer, som kan bruges til systematisk at bestemme brøker som approksimationer til kvadratrødder.

Mere om lineær regression

Sven Erik Morsing, Kongens Lyngby

Jeg vil gerne tage tråden op fra artiklen af Carl Winsløw, *Fodgængerversion af lineær regression* i LMFK–bladet, 2015 nr. 1. Ved at ændre lidt på valget af parametre mener jeg, vi opnår at få et lidt lettere regnearbejde, samtidig med at ideen måske er lidt tættere på vores intuition. Endelig vil jeg påpege en tilgang, der giver en genvej – måske til glæde for den almindelige elev – en rollatorversion.

Der er blot tale om nogle småændringer, hvorfor jeg vil lægge mig så tæt op ad Winsløws fremstilling som muligt og derfor så vidt muligt benytte de samme variabelnavne som i ovennævnte artikel.

Til et datasæt $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, hvor ikke alle x_k er ens, søges den bedste lineære sammenhæng $y = ax + b$, geometrisk set den bedste rette linje. Varieres parameteren b, parallelforskydes linjen lodret. Varieres a, drejes linjen om punktet $(0, b)$, et punkt, der sagtens kan ligge meget langt uden for de givne punkter. Dette er således et noget arbitrært omdrejningspunkt, hvorfor et mere oplagt punkt at dreje om vil være et punkt i nærheden af det centrale punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, tyngdepunktet eller centrum. Hér er $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ og $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Vi vil derfor i stedet for den sædvanlige sammenhæng $y = ax + b$ benytte

$$y = a(x - \bar{x}) + b$$

eller

$$y = a(x - \bar{x}) + (\bar{y} + c),$$

hvor $c = b - \bar{y}$. Vi vælger altså et omdrejningspunkt, ikke på y–aksen, men på den lodrette linje med ligningen $x = \bar{x}$, *in casu* punktet $(\bar{x}, \bar{y} + c)$.