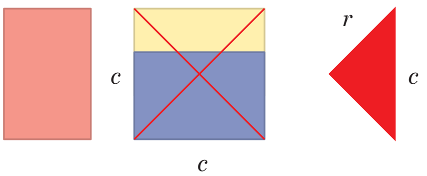
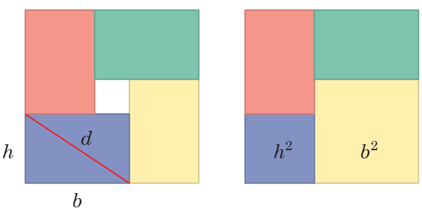
Lille, mellem og store Pythagoras med 3, 4 og 5 spillekort

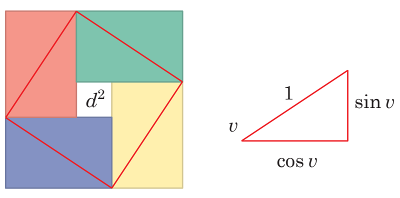
Allan Tarp, VUC Aarhus

I. Et tredje spillekort kan vise, hvor meget to andre skal forskydes for at danne et kvadrat med sidelængden c. De to diagonaler, hver med længde $2 \cdot r$, danner fire ens ligebenede retvinklede trekanter, hver med arealet $½ \cdot r^2$. Dvs. $c^2 = 4 \cdot ½ \cdot r^2 = r^2 + r^2$ (*lille Pythagoras*).



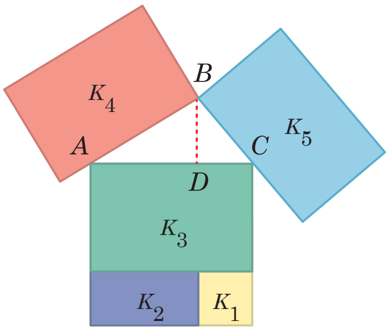
II. Fire spillekort har bredde b og højde h. Bunken drejes 90 grader og anbringes til højre for det nederste kort, som blev liggende. Dette gentages 3 gange. Den dannede figur dækker nu arealet $h^2 + b^2$ + to kort. Under processen er diagonalerne også drejet 90 grader, og danner nu arealet d^2, som sammen med 4 halve kort dækker figuren. Da fire halve kort og to hele kort har samme areal, er $d^2 = h^2 + b^2$ (*mellem Pythagoras*).





Specielt gælder, at $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ i en retvinklet trekant med diagonalen 1 og siderne $\sin v$ og $\cos v$.

III. Kort K_1 anbringes på langs. K_2 anbringes ovenpå og drejes en kvart omgang så de nederste venstre hjørner er sammenfaldende. K_3 anbringes på K_2 så K_1 og K_3 danner et kvadrat. Kortene K_4 og K_5 bruges til at frembringe en trekant ABC, hvor højden BD, som skal være en forlængelse af K_2's højre side (evt. vist med en blyant), opdeler ABC i to retvinklede trekanter, BDA og BDC.



I den højre trekant BDC er $DB = a \cdot \sin C$ og $DC = a \cdot \cos C$.

AC's ydre kvadrat dækkes af to kvadrater dannet af AD og DC, samt to strimler med længden AC. AD's kvadrat vil da være AC's kvadrat minus de to strimler plus DC's kvadrat, som er fratrukket to gange:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot AC \\ &= b^2 + (a \cdot \cos C)^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}$$

I den venstre trekant ABD er

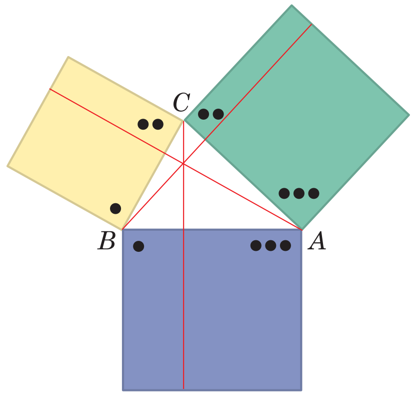
$$\begin{aligned} AB^2 &= DB^2 + AD^2 \\ &= a^2 \cdot (\sin C)^2 + a^2 \cdot (\cos C)^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}$$

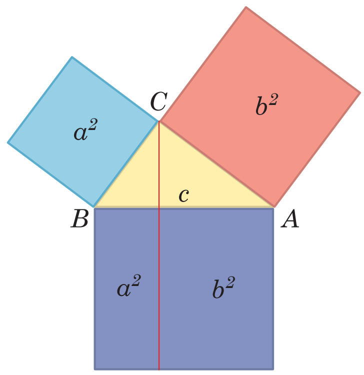
da $a^2 \cdot (\sin C)^2 + a^2 \cdot (\cos C)^2$
$= a^2 \cdot ((\sin C)^2 + (\cos C)^2) = a^2 \cdot 1 = a^2$.

Heraf følger (*store Pythagoras*), at

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Samtidig ses, at højden fra C opdeler c's ydre kvadrat i to dele, som har arealet $c \cdot b \cdot \cos A$ til A's side og arealet $c \cdot a \cdot \cos B$ til B's side. Det vises let, at højden fra A tilsvarende opdeler a's ydre kvadrat i to dele, som har arealet $a \cdot c \cdot \cos B$ til B's side og arealet $a \cdot b \cdot \cos C$ til C's side, samt at højden fra B opdeler b's ydre kvadrat i to dele, som har arealet $b \cdot c \cdot \cos A$ til A's side og arealet $b \cdot a \cdot \cos C$ til C's side.





Der gælder derfor følgende to regler:

I en trekant med spidse vinkler opdeler højderne de modsatte siders ydre kvadrater i stykker, som er parvis ens omkring de tre vinkler med størrelsen $a \cdot b \cdot \cos C$ omkring vinkel C osv.

I en retvinklet trekant opdeler højden diagonalens ydre kvadrat i stykker, der svarer til de korte siders kvadrater.