Andengradsligningen – et spørgsmål

Jens Carstensen, Frederiksberg

Andengradsligningen

$$x^2 + x - 2 = 0$$

er af typen $x^2 + ax + b = 0$ med $a = 1$ og $b = -2$. Rødderne er $x = 1$ og $x = -2$, dvs. de samme som koefficienterne a og b. Findes der mon andre sådanne ligninger? Altså:

Opgave. Bestem samtlige talsæt (a, b), så rødderne i ligningen $x^2 + ax + b = 0$ er a og b.

Løsning 1. Hvis rødderne er a og b, giver sætningen om røddernes sum og produkt, at

$$a + b = -a \quad \text{og} \quad a \cdot b = b$$

Dette ligningssystem har løsningerne $(a, b) = (1, -2)$ og $(a, b) = (0,0)$ svarende til ligningerne

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{og} \quad x^2 = 0$$

Løsning 2. Vi bruger ikke sætningen om røddernes sum og produkt, men kun at a og b er rødder i $x^2 + ax + b = 0$. Dette giver, at

$$a^2 + a^2 + b = 0 \quad \text{og} \quad b^2 + a \cdot b + b = 0$$

Hvis $b = 0$, er $a = 0$, så $(a, b) = (0, 0)$ er brugbar. Hvis $b \neq 0$, får vi af den sidste ligning

$$b + a + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a - 1$$

som indsat i den første ligning giver

$$2a^2 - a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hertil svarer

$$b = -a - 1 = \begin{cases} -2 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Altså har vi fundet (som før) $(a, b) = (1, -2)$, men nu åbenbart også $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Rødderne i ligningen

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} = 0$$

er imidlertid $x = 1$ og $x = -\frac{1}{2}$, og disse opfylder ikke kravet.

Hvorfor er der denne uoverensstemmelse mellem de to løsningsmetoder?

Henvisning

H. M. Finucan, *On note 3038* (The Mathematical Gazette, February 1964, s. 93).