Logaritmers beregning

Jens Carstensen, Frederiksberg

Med en smule numerisk snedighed kan vi med to decimaler udregne titalslogaritmen af de første mange naturlige tal. Metoderne illustrerer logaritmeregnereglerne på en måde, som gennemsnitlige gymnasieelever sagtens kan følge.

Ved at lege lidt med tallene får man en god føling med, hvad logaritmer 'egentlig' er – nemlig en registrering af potenser af 10. Vore elever kan gå på jagt efter potenser af 10, der ligger tæt ved visse tal og derved finde gode tilnærmelser til logaritmer.

Logaritmen af et positivt tal er defineret som den eksponent, som 10 skal opløftes til for at give tallet:

$$a = 10^{\log a}$$

så $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$ osv.

Nu er $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, hvoraf

$$10 \cdot \log 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log 2 \approx 0{,}30,$$

hvilket er sandt med 2 decimaler.

Så kommer log3. Lidt snedigt skriver vi

$$3^5 = 243 \approx 250 = \frac{1000}{4},$$

så vi får

$$5 \cdot \log 3 = \log 1000 - \log 4 = 3 - 2 \cdot \log 2 \approx 2{,}40 \quad \Leftrightarrow \quad \log 3 \approx 0{,}48,$$

som igen stemmer med to decimaler.

Det næste tal er let:

$$\log 4 = 2 \cdot \log 2 \approx 0{,}60.$$

Derefter får vi

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 \approx 0{,}70 \quad \text{og} \quad \log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0{,}78.$$

Vi ser, at vi kan nøjes med at finde logaritmer af primtallene. Vi kunne også benytte det lidt mere eksotiske

$$6^9 = 10\,077\,696 \approx 10^7,$$

hvoraf

$$9 \cdot \log 6 \approx 7 \quad \Leftrightarrow \quad \log 6 \approx 0{,}78.$$

Videre er $7^2 = 49 \approx 50$, hvilket giver

$$2 \cdot \log 7 \approx \log 50 = \log 100 - \log 2 = 2 - 0{,}30 = 1{,}70 \quad \Leftrightarrow \quad \log 7 \approx 0{,}85.$$

Derefter er $9 \cdot 11 = 99 \approx 10^2$, hvoraf

$$\log 11 \approx 2 - 2 \cdot \log 3 \approx 1{,}04.$$

Idet $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 \approx 10^3$, finder vi

$$\log 13 \approx 3 - \log 7 - \log 11 \approx 1{,}11.$$

Derefter benytter vi følgende snedighed:

$$17^2 = 289 \approx 288 = 32 \cdot 9 = 2^5 \cdot 3^2,$$

så vi får

$$2 \cdot \log 17 \approx 5 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log 17 \approx 1{,}23,$$

hvilket igen er korrekt med to decimaler. Selvfølgelig kunne vi mindre udspekuleret bruge, at

$$17^3 = 4913 \approx 5000 = \frac{10^4}{2},$$

hvilket giver

$$3 \cdot \log 17 \approx 4 - \log 2 \approx 3{,}70 \quad \Leftrightarrow \quad \log 17 \approx 1{,}23.$$

Ved lidt pusleri finder vi, at

$$19^5 = 2\,476\,099 \approx 2\,500\,000 = \frac{10^7}{4},$$

hvoraf

$$5 \cdot \log 19 \approx 7 - 2 \cdot \log 2 \approx 6{,}40 \quad \Leftrightarrow \quad \log 19 \approx 1{,}28,$$

igen korrekt med 2 decimaler.

Læserne kan selv fortsætte med mere eller mindre udspekulerede metoder til bestemmelse af logaritmer af 23, 29, 31, . . .

Henvisning

Calculating Logarithms, Mathematical Digest, Number 174, January 2014, University of Cape Town.