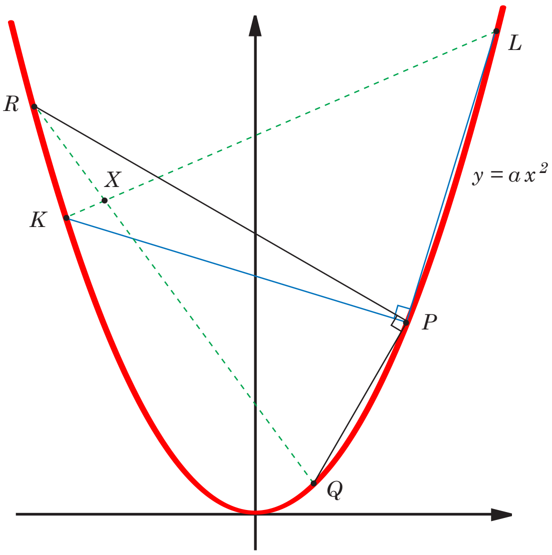
En lidet kendt sætning om parablen

Jens Carstensen, Frederiksberg

Vi har tidligere her i bladet set på forskellige egenskaber ved den almindelige parabel. Vi skal her vise en sætning, der sikkert er temmelig ukendt.

Sætning. Lad P være et vilkårligt punkt på en parabel. To ortogonale linjer gennem P skærer parablen i Q og R. Da vil QR gå gennem et fast punkt X, uafhængigt af valget af ortogonale linjer. Punktet X kaldes *Frégier–punktet* svarende til P.



Bevis. Vi gennemfører beviset med analytisk geometri. Vi ser på parablen med ligningen $y = ax^2$ og sætter $P(x_0, y_0)$. De to ortogonale linjer m_1 og m_2 gennem P har ligningerne

$$m_1:\ y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{og} \quad m_2:\ y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

x–koordinaten x_1 til skæringspunktet $R(x_1, y_1)$ mellem m_1 og parablen findes ved at løse ligningen

$$y_0 + k(x - x_0) = ax^2 \quad \text{eller} \quad ax_0^2 + k(x - x_0) = ax^2.$$

Elementære regninger giver

$$x_1 = \frac{k}{a} - x_0 \tag{1}$$

På samme måde fås x–koordinaten x_2 til skæringspunktet $Q(x_2, y_2)$ mellem m_2 og parablen ved at løse ligningen

$$ax_0^2 - \frac{1}{k}(x - x_0) = ax^2$$

hvilket giver

$$x_2 = -x_0 - \frac{1}{ka} \tag{2}$$

Hældningen for forbindelseslinjen QR er

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^{\,2} - ax_1^{\,2}}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2)$$
$$= a\left(-x_0 - \frac{1}{ka} + \frac{k}{a} - x_0\right) = k - \frac{1}{k} - 2ax_0$$

og ligningen for QR er derfor

$$y - y_1 = \left(k - \frac{1}{k} - 2ax_0\right)(x - x_1) \quad \Leftrightarrow$$
$$y - ax_1^{\,2} = \left(k - \frac{1}{k} - 2ax_0\right)(x - x_1) \tag{3}$$

For at komme videre i dette tilsyneladende udsigtsløse algebraiske helvede, prøver vi at gennemregne et eksempel for eventuelt at få en idé til løsningen.

Vi ser på parablen med ligningen $y = \frac{1}{4}x^2$ og punktet $P(4, 4)$. Vi vælger en hældning for m_1 på $k = -1$. Formlerne (1) og (2) giver så, at $x_1 = -8$, så R får koordinaterne $(-8, 16)$. Videre er $x_2 = 0$, så Q er $(0, 0)$. Linjen QR får ligningen $y = -2x$.

Lad derefter $k = -\frac{1}{4}$, hvilket giver $x_1 = -5$ og dermed $R\left(-5, 6\frac{1}{4}\right)$. Desuden er $x_2 = 12$, så Q er $(12, 36)$. Linjen QR får ligningen $y = \frac{7}{4}x + 15$.

Skæringspunktet mellem linjerne med ligningerne $y = 2x$ og $y = \frac{7}{4}x + 15$ findes let til $(-4, 4)$.

Vi får derfor den mistanke, at samtlige linjer med ligninger af typen (3) går gennem et punkt med x–koordinaten $-x_0$. Vi indsætter altså i ligningen (3) værdierne

$$x_1 = \frac{k}{a} - x_0 \quad \text{og} \quad x = -x_0$$

og efter en række trælse reduktioner finder vi

$$y = y_0 + \frac{1}{a}.$$

Vi slutter, at samtlige linjer QR (for varierende værdier af hældningen k) går gennem det faste punkt med koordinaterne $\left(-x_0\,,\ y_0 + \frac{1}{a}\right)$, som netop ikke afhænger af k. Dermed er sætningen vist.

Man kan sige, at Frégier–punktet X fås af P ved en glidespejling (dvs. en spejling efterfulgt af en parallelforskydning) i parablens akse med en forskydningsvektor med koordinaterne $\left(0\,,\ \frac{1}{a}\right)$.

Henvisning

Michel Bataille, *Glide Reflections in the Plane*, Crux Mathematicorum, No. 3, March 2013.