Antal meldeforløb i bridge

Ib Axelsen, pensioneret matematiklærer

I bridge anvender man et sædvanligt spil kort, og de 52 kort fordeles med 13 til hver af de fire spillere. For en matematiker er det let at bestemme antallet af muligheder for de 13 kort til den enkelte spiller:

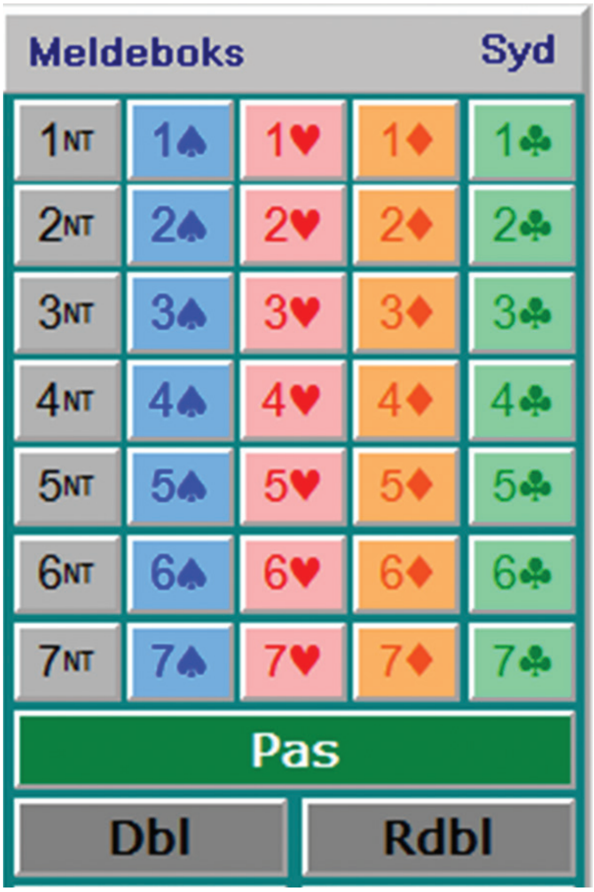
$$K(52{,}13) = 635.013.559.600$$

Det er heller ikke så svært at bestemme antallet af fordelinger af alle 52 kort til de fire spillere:

$$K(52{,}13)\cdot K(39{,}13)\cdot K(26{,}13) = 52!\ /\ (13!)^4 = 5{,}36\cdot 10^{28}$$

Men hvor mange mulige meldeforløb er der? Det er straks sværere at regne ud.

De mulige meldinger fremgår af denne meldeboks fra et computerspil:



De første 35 fra 1♣ til 7NT er de såkaldte bud, hvor det kun er tilladt at afgive højere og højere bud. Tallet angiver antal stik fra 7 til 13 (6 + tallet), mens symbolet angiver trumf, hvor NT er uden trumf.

I stedet for at afgive et bud kan en spiller melde pas, doble de andres bud eller redoble de andres dobling af makkerparrets bud.

Vi kan tage udgangspunkt i et meldeforløb med 4 bud, fx

... 1♦ ... 1♠ ... 2♣ ... 3NT ...

Efter 3NT er der følgende 7 muligheder:

pas	pas	pas						
dbl	pas	pas	pas					
dbl	rdbl	pas	pas	pas				
dbl	pas	pas	rdbl	pas	pas	pas		
pas	pas	dbl	pas	pas	pas			
pas	pas	dbl	rdbl	pas	pas	pas		
pas	pas	dbl	pas	pas	rdbl	pas	pas	pas

De tre gange pas gør, at meldeforløbet er afsluttet.

I de tre mellemrum imellem buddene er der de samme 7 muligheder med kun to gange pas, en pas og ingen pas. Altså 21 muligheder for hvert af de 3 mellemrum. Der kan ikke være tre gange pas, for så ville meldeforløbet være afsluttet.

Foran 1♦ kan der være 0, 1, 2 eller 3 gange pas, 4 muligheder.

Dermed bliver det samlede antal mulige meldeforløb med disse 4 bud:

$$4\cdot 21^3\cdot 7 = \frac{4}{3}\cdot 21^4$$

De 4 bud kan vælges på $K(35{,}4)$ måder, så alt i alt er der

$$\frac{4}{3}\cdot K(35{,}4)\cdot 21^4$$

meldeforløb med 4 bud.

Med i bud (fra 1 til 35) er der

$$\frac{4}{3}\cdot K(35,\ i)\cdot 21^i$$

Antal mulige meldeforløb med 1 eller flere bud får vi så ved at summere fra 1 til 35:

$$\frac{4}{3}\cdot\sum_{1}^{35} K(35,\ i)\cdot 21^i$$

Summen er næsten det, man får, hvis man anvender binomialformlen på $(21 + 1)^{35}$, men hvis det skal passe, skal summen starte med $i = 0$. Hvis vi lader summen starte med 0, får vi $\frac{4}{3}$ for meget med, men dem kan vi så bare trække fra og får:

$$\frac{4}{3}\cdot 22^{35} - \frac{4}{3}$$

Der mangler imidlertid 1 meldeforløb, nemlig det uden noget bud, 4 gange pas, så vi skal lægge 1 til for at få det samlede antal mulige meldeforløb:

$$\frac{4}{3} \cdot 22^{35} - \frac{1}{3} \;=\; (4 \cdot 22^{35} - 1) / 3 = 1{,}28 \cdot 10^{47}$$

Der findes en anden, og måske mere elegant måde at udlede antallet af meldeforløb på. Hvis meldeforløbet starter med 7NT, kan det afsluttes på de 7 viste måder.

Hvis meldeforløbet starter med 7♠, kan det afsluttes på de 7 viste måder, men det kan også på 21 måder fortsætte med en "mellemrumssekvens" til 7NT og en afslutning. Dermed er der $7 + 21 \cdot 7$ meldeforløb, der starter med 7♠, og

$$7 + 21 \cdot 7 + 7 = 7 + 22 \cdot 7$$

meldeforløb, der starter med 7♠ eller et højere bud (her er der kun 1 højere bud).

Princippet gør sig gældende, uanset hvilket bud vi ser på. Antallet af meldeforløb, der starter med dette bud eller et højere bud, er

$$7 + 21 \cdot (\text{antal med start over}) + (\text{antal med start over})$$
$$= 7 + 22 \cdot (\text{antal med start over})$$

Nu kører det:

7NT: 7
7♠: $7 + 22 \cdot 7$
7♥: $7 + 22 \cdot (7 + 22 \cdot 7) = 7 + 7 \cdot 22 + 7 \cdot 22^2$
7♦: $7 + 22 \cdot (7 + 7 \cdot 22 + 7 \cdot 22^2) = 7 + 7 \cdot 22 + 7 \cdot 22^2 + 7 \cdot 22^3$
7♣: $7 + 22 \cdot (7 + 7 \cdot 22 + 7 \cdot 22^2 + 7 \cdot 22^3) = 7 + 7 \cdot 22 + 7 \cdot 22^2 + 7 \cdot 22^3 + 7 \cdot 22^4$
...
...
1♣: $7 + 7 \cdot 22 + 7 \cdot 22^2 + 7 \cdot 22^3 + 7 \cdot 22^4 + \ldots + 7 \cdot 22^{34}$

Ud for 1♣ har vi det samlede antal meldeforløb, bortset fra at vi skal gange med 4 svarende til et antal passer først og lægge 1 til for meldeforløbet med fire gange pas. Alle udtrykkene er kvotientrækker, hvor vi kan anvende formlen for summen af en kvotientrække, så det samlede antal meldeforløb bliver

$$4 \cdot 7 \cdot (22^{35} - 1)/21 + 1 = (4 \cdot 22^{35} - 1) / 3$$

Det er nok de færreste bridgespillere, der forestiller sig, at der er så markant flere mulige meldeforløb end fordelinger af de 52 kort. I praksis forekommer der ikke ret mange meldeforløb, for meldingerne skal have en fornuftig relation til de 13 kort, hver spiller er blevet tildelt.