En overraskende ligning

Jens Carstensen, Frederiksberg

En standardopgave i indledende geometri i gymnasiet er følgende:

Bestem højden h af en skorsten, når sigtelinjerne til skorstenens top fra P og Q danner vinklerne w og v med vandret og afstanden $PQ = b$ er kendt. Afstanden a fra skorstenen til Q er ikke kendt, idet en eller anden forhindring umuliggør måling af denne afstand på jorden.

Vi får, at

$$\tan v = \frac{h}{a} \quad \text{og} \quad \tan w = \frac{h}{a+b},$$

hvoraf

$$a = \frac{h}{\tan v} \quad \text{og} \quad a+b = \frac{h}{\tan w}$$

og subtraktion giver

$$b = \frac{h}{\tan w} - \frac{h}{\tan v} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{b}{\frac{1}{\tan w} - \frac{1}{\tan v}}.$$

Dermed er opgaven løst, fordi den ukendte størrelse h er udtrykt ved de kendte størrelser v, w og b.

Nu kan den sidste ligning omformes til

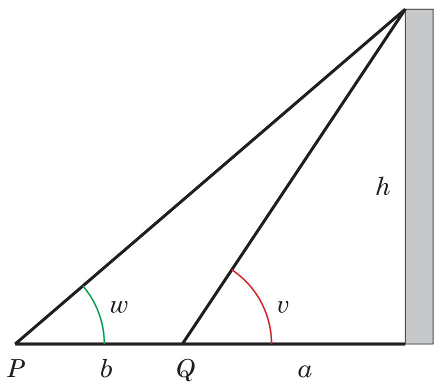
$$\frac{1}{\tan w} - \frac{1}{\tan v} = \frac{1}{\frac{h}{b}}$$

og til

$$\frac{1}{\frac{h}{a+b}} = \frac{1}{\frac{h}{a}} + \frac{1}{\frac{h}{b}}$$

en overraskende sammenhæng, som selvfølgelig er ensbetydende med den trivielle

$$\frac{a+b}{h} = \frac{a}{h} + \frac{b}{h}.$$



Henvisning

James Metz: *An Unexpected Equation* (Mathematics Teacher, May 2014).

Fra prostaparese til logaritmer

Jens Carstensen, Frederiksberg

Iagttagelsen af, at regningsarterne addition og subtraktion for flercifrede tal er lettere end multiplikation og division førte til opdagelsen af logaritmerne af den skotske matematiker *John Napier* (1550–1617). Formlerne

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad \text{og}$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

har netop de 'vanskelige' regningsarter på venstre side, og de 'simple' på højre.

Før logaritmernes fremkomst benyttede især astronomer, der skulle foretage en del regnearbejde, den såkaldte *prostaparese*. Man havde til rådighed omfattende tabeller over de trigonometriske funktioner. Formlen

$$\cos u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\left(\cos(u+v) + \cos(u-v)\right)$$

er af samme type som den første af logaritmeformlerne ovenfor: Den forvandler multiplikation til addition. *Copernicus* (1473–1543) henviser til metoden i sit værk *De Revolutionibus Orbium Coelestium* fra 1543 og den danske astronom *Tycho Brahe* (1546–1601) gjorde udstrakt brug af prostaparese.

Lad os se på et eksempel. Vi ønsker at foretage den vanskelige multiplikation $0{,}43 \cdot 0{,}65$. I de trigonometriske tabeller finder vi, at $0{,}43 = \cos 64{,}53°$ og $0{,}65 = \cos 49{,}46°$. Derfor sætter vi $u = 64{,}53°$ og $v = 49{,}46°$. Så får vi, igen ved hjælp af tabellerne:

$$\cos(u + v) = \cos 113{,}99° = -0{,}4066$$

og

$$\cos(u - v) = \cos 15{,}07° = 0{,}9656$$

Efter formlen ovenfor er så

$$\begin{aligned} 0{,}43 \cdot 0{,}65 &= \tfrac{1}{2}\,(-0{,}4066 + 0{,}9656) \\ &= 0{,}2795. \end{aligned}$$

Napier lærte om prostaparese på en lidt besynderlig måde. I 1590 var kong James VI af Skotland (senere James I af England) på vej til Danmark for at indgå ægteskab med prinsesse Anne, datter af Frederik I. Et uvejr tvang hans skib til at søge ly på Ven og under selskabets ophold på øen lærte John Craig, hoflæge for James I, om prostaparese af Tycho Brahe og videregav metoden til Napier efter sin hjemkomst til Skotland.

Napier havde et stykke tid arbejdet med i regnemetoder og i 1614 offentliggjorde han sit pionerarbejde *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Napiers logaritmer svarede nærmest til de nuværende naturlige logaritmer og *Henry Briggs* (1561–1631), matematikprofessor i Oxford, arbejdede siden sammen med Napier på et fremstille tabeller over titalslogaritmen – tabeller, som var i brug de næste 300 år.

Henvisning

From Prosthaparesis to Logarithms (Mathematical Digest, No. 175, April 2014).