Annuiteter med konstant ydelse og konstant rente

Helge Leonard Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Den første i hver termin fra en eller anden dato sættes y kroner i en bank med konstant rente r. $A_1 = y$ er indestående på kontoen i indsættelsesøjeblikket.

Når beløbet y er indsat n gange er der A_n kroner på opsparingskontoen, og terminen efter er der

$$A_{n+1} = A_n \cdot (1+r) + y$$

på kontoen, hvor den første indbetaling y er vokset til $y \cdot (1+r)^n$, og de sidste n indbetalinger er vokset til A_n, hvilket så medfører, at

$$A_{n+1} = A_n \cdot (1+r) + y = y \cdot (1+r)^n + A_n$$

Vi tager nu fat på de to sidste led i ovenstående og får så efter lidt regnearbejde følgende kendte formel:

$$A_n \cdot (1+r) + y = y \cdot (1+r)^n + A_n \Leftrightarrow A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

som står til højre for ensbetydendetegnet.

Nåh, så kommer vi til følgende situation idet gælden $R_0 = A_0$ opstår den første i en eller anden termin, og afdrages med den faste ydelse y i de følgende terminer, og med konstant rente r. Restgælden i starten af den første termin efter gældsstiftelsen er

$$R_1 = A_0 \cdot (1+r) - y = A_0 - (y - A_0 \cdot r)$$

Efter n terminer er restgælden lig med R_n. I starten af den efterfølgende termin er restgælden lig med

$$R_{n+1} = R_n \cdot (1+r) - y$$

Hvis vi så vender blikket tilbage på udtrykket

$$R_1 = A_0 \cdot (1+r) - y = A_0 - (y - A_0 \cdot r)$$

så vil størrelsen A_0 være reduceret til R_n og $(y - A_0 \cdot r)$ være vokset til $(y - A_0 \cdot r) \cdot (1+r)^n$, såfremt vi lader ydelsen y kun afdrage på A_0, måske lidt fortænkt, men det viser sig så, at

$$R_{n+1} = R_n \cdot (1+r) - y = R_n - (y - A_0 \cdot r) \cdot (1+r)^n$$

Og hvis vi så kigger nærmere på de to sidste ovenstående dele, får vi, at

$$R_n \cdot (1+r) - y = R_n - (y - A_0 \cdot r) \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow$$
$$R_n = A_0 \cdot (1+r)^n - y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$