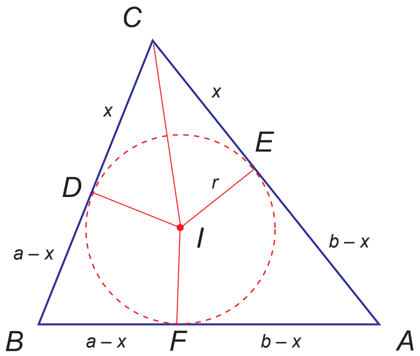
Cosinusrelationen og den indskrevne cirkel

Jens Carstensen, Frederiksberg

De fleste lærebøger udleder cosinusrelationerne i tre særskilte tilfælde (spids–, ret– og stumpvinklet trekant). Vi ser her på et bevis, der anvendes på den almindelige trekant uden opdeling i tilfælde, og som desuden ikke bruger Pythagoras sætning. Til gengæld slipper vi ikke for en smule trigonometri.



I ΔABC tangerer den indskrevne cirkel med centrum I og radius r siderne i D, E og F. Vi sætter $x = CD = CE$ og får

$$c = (a-x) + (b-x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

I ΔCEI er

$$\tan\tfrac{C}{2} = \tfrac{r}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t}{\tan\frac{C}{2}}$$

og dermed

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{r}{\tan\frac{C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot(a+b-c)\,.$$

Trekantens areal er

$$\tfrac{1}{2}ab\cdot\sin C = \tfrac{1}{2}r\cdot(a+b+c) \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{ab\cdot\sin C}{a+b+c}\,.$$

Altså er

$$\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot(a+b-c) = \frac{ab\cdot\sin C}{a+b+c} \quad \Leftrightarrow$$

$$ab\cdot\sin C = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot\left((a+b)^2 - c^2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$ab\cdot 2\sin\tfrac{C}{2}\cos\tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\left((a+b)^2 - c^2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2 - c^2 = 4ab\cdot\cos^2\tfrac{C}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cdot\cos^2\tfrac{C}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\left(2\cos^2\tfrac{C}{2} - 1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C\,.$$

Henvisning

Larry Hoehn: *Derivation of the Law of Cosines via the Incircle*, Forum Geometricorum, Vol. 13 (2013), side 133–134.