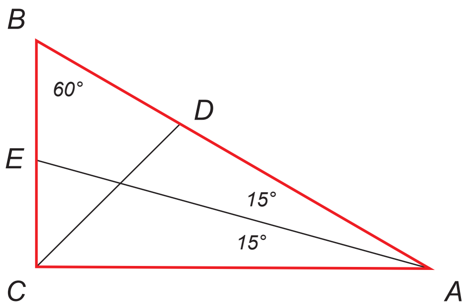
En bemærkning om 30°-60°-90°-trekanten

JENS CARSTENSEN, Frederiksberg

Det er velkendt, at der i en 30°–60°–90°–trekant gælder, at sideforholdet er $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$. Her kommer en anden knap så kendt egenskab ved denne type trekant.

Sætning. I ΔABC er $A = 30°$, $B = 60°$ og $C = 90°$. Da er vinkelhalveringslinjen AE fra A dobbelt så lang som vinkelhalveringslinjen CD fra C.



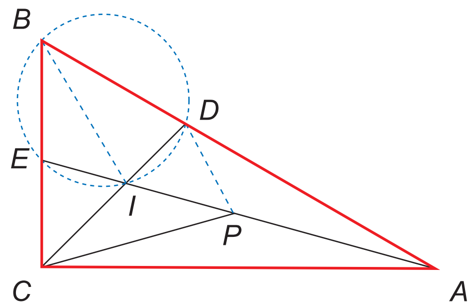
Bevis. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i ΔABC og P midtpunkt af AE. I ΔAIC er $\angle IAC = 15°$ og $\angle ACI = 45°$, så $\angle CIA = 120°$ og dermed er $\angle EID = 120°$. Men da $\angle EBD = 60°$ er så $\square EBDI$ indskrivelig. Da $\angle EBI = \angle IBD$ er korderne EI og ID i den omskrevne cirkel lige lange, dvs. $EI = ID$.

I den retvinklede ΔCEA er CP median fra den rette vinkel, så $CP = AP = EP$. Altså er ΔCPA ligebenet, så $\angle PAC = \angle ACP = 15°$.

Dermed er $\angle ICP = 30°$. I ΔCIP ser vi så, at $\angle IPC = 30°$. Altså er ΔCIP ligebenet med $CI = IP$.

Nu får vi endelig, at

$$CD = CI + ID = IP + EI = EP = \tfrac{1}{2} AE .$$



Man kan selvfølgelig gennemføre et trigonometrisk bevis for sætningen eller et bevis, hvor man benytter formlen for vinkelhalveringslinjernes længder. Sådanne beviser inddrager en mængde algebra og er i grunden uelegante sammenlignet med det netop anførte bevis.

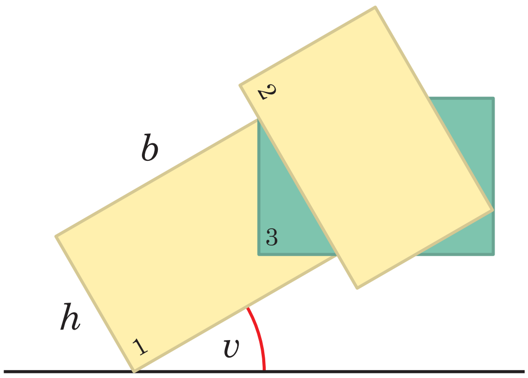
Henvisning

gogeometry.com (Problem 963).

Sinus og cosinus differentieret med tre spillekort

ALLAN TARP, VUC Aarhus

Tre spillekort har højde h og bredde b. Kort 1 og 2 drejes så b danner vinklen v med vandret. Kort 2 drejes 90 grader og anbringes for enden af kort 1, så b her danner vinklen v med lodret. Kort 3 forbliver vandret og skydes ind under kort 2 og over kort 1 indtil der dannes en trekant med h som den lange side.



Som bekendt aflæses sinus og cosinus som første– og andenkoordinat i en enhedscirkel. Får vinklen v en meget lille tilvækst dv, gælder tilnærmelsesvis, at cirklen (venstre b på kort 2) er lineær, og at de to vinkelben fra v og $v + dv$ (nederste og øverste b på kort 1) er parallelle. Hvis v måles i radian, vil trekantens lodrette, vandrette og lange side være de tre tilvækstsider $d(\sin v)$ og $-d(\cos v)$ og dv. Da den lange side danner vinklen v med lodret, er

$$\cos v = d(\sin v)dv \quad \text{og} \quad \sin v = -d(\cos v)dv \qquad \text{eller}$$

$$d(\sin v)dv = (\sin v)' = \cos v \quad \text{og} \quad d(\cos v)dv = (\cos v)' = -\sin v$$