

## !! Månedens opgave !!

For kvikke gymnasie/hf-elever bringes hver måned (undtagen juli og august) på nettet en lille opgave, **Månedens Opgave**. Den kan handle om simpel geometri, ligningsløsning, betragtninger over tal mm. Løsningen på opgaven bringes måneden efter. Blandt elever, der har indsendt korrekte løsninger, trækkes lod om en symbolregner eller et matematik-program til pc/mac.

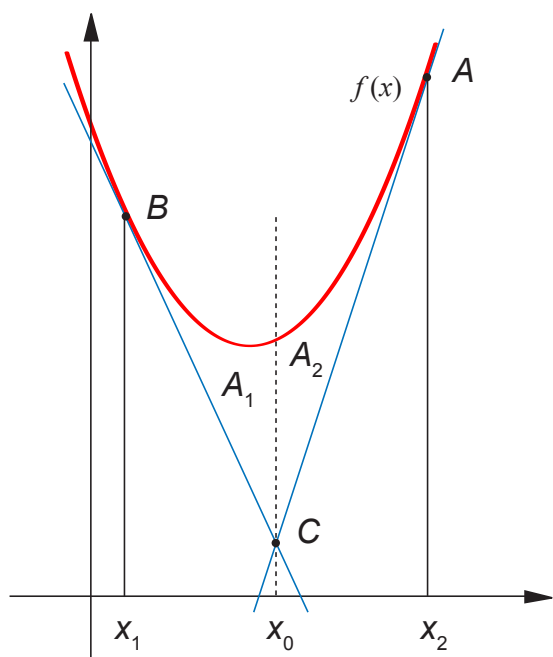
For at så mange elever som muligt kan få lejlighed til at stifte bekendtskab med lidt morsom matematik, bedes matematiklærerne gøre egnede elever opmærksom på opgaven, der findes på adressen [uvmat.dk/opgaver.htm](http://uvmat.dk/opgaver.htm). Her kan man også læse tidligere opgaver og løsninger.

**Månedens Opgave** redigeres af Jens Carstensen, Frederiksberg og Palle Bak Petersen, Hillerød.

## En egenskab ved parabeln

JENS CARSTENSEN, Frederiksberg

Vi har i de seneste numre af LMFK-Bladet set på en række egenskaber ved andengradspolynomiet og dets graf. Vi skal her omtale endnu en ikke så kendt egenskab ved parabeln.



Vi ser på  $f(x) = ax^2 + bx + c$  og antager for nemheds skyld, at  $a > 0$ . I to punkter  $B$  og  $A$  på parabeln  $(x_1, f(x_1))$  og  $(x_2, f(x_2))$  tegnes tangentene. De skærer hinanden i punktet  $C$ , hvis  $x$ -

koordinat er  $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ . Dette vises let ved hjælp af tangenternes ligninger.

Området mellem parabeln og tangentene deles af en lodret linje gennem  $C$  i to mindre områder med arealer  $A_1$  og  $A_2$ . Da er (overraskende nok)  $A_1 = A_2$ .

Beviset for dette føres ved integralregning og en solid dosis algebra og er ikke svært.

Vi siger for kortheds skyld, at andengradspolynomiet har *arealegenskaben*, dvs. området mellem grafen og to tangenter deles af en lodret linje gennem tangenternes skæringspunkt i to områder med samme areal.

Der gælder nu overraskende nok den *omvendte* sætning:

Lad  $f$  være en to gange differentiabel funktion, hvor  $f''(x)$  er kontinuert og positiv for alle  $x$ . Hvis  $f$  har arealegenskaben, er  $f$  et andengradspolynomium.

Beviset for dette er særdeles kompliceret.

### Henvisning

Connie Xu: *A Unique Area Property of the Quadratic Function*, Mathematics Magazine, February 2014.