Opsparing beregnet ved rekursionsformler

Sven Erik Morsing, Kongens Lyngby

Det er sædvane at udlede annuitetsformlerne gennem brug af kvotientrækken. Imidlertid er der noget iterativt over opsparingsproceduren. Jeg vil derfor præsentere følgende alternative udledning.

En typisk opsparingsstrategi er at indbetale et fast beløb (ydelsen) y hver termin (fx hver måned).

Saldoen til en begyndelse er S_0. Rentefoden er r (svarende til 100 r %). Ved første termin tilskrives renter, og saldoen vokser med faktoren $1 + r$ til $S_0(1 + r)$. Samtidigt indbetales ydelsen y. Den nye saldo bliver så sluttelig $S_0(1 + r) + y$. Dette fortsættes, jf. tabellen.

termin	**saldo**
start	S_0
1. termin	$S_1 = S_0(1 + r) + y$
2. termin	$S_2 = S_1(1 + r) + y$
3. termin	$S_3 = S_2(1 + r) + y$
...	
...	
n. termin	$S_n = S_{n-1}(1 + r) + y$

Med et lille kunstgreb indfører vi q, så $y = r{\cdot}q$

$$
\begin{aligned}
&S_n = S_{n-1}(1 + r) + y && \Leftrightarrow\\
&S_n = S_{n-1}(1 + r) + r{\cdot}q && \Leftrightarrow\\
&S_n = S_{n-1}(1 + r) + (1 + r){\cdot}q - q && \Leftrightarrow\\
&S_n + \mathrm{q} = S_{n-1}(1 + r) + (1 + r){\cdot}q && \Leftrightarrow\\
&S_n + \mathrm{q} = (S_{n-1} + q)(1 + r) && \Leftrightarrow\\
&K_n = K_{n-1}(1 + r)
\end{aligned}
$$

hvor vi har sat $K_n = S_n + q$.

Vi ser nu (rekursivt), at

$$K_n = K_0(1 + r)^n \qquad (1)$$

eller

$$S_n + q = (S_0 + q)(1 + r)^n \qquad (2)$$

I den sædvanlige annuitetsopsparing er startsaldoen S_0 typisk lig med 0, og vi benævner den n'te værdi S_n med A_n. Af (2) får vi så

$$
\begin{aligned}
&A_n = q{\cdot}(1 + r)^n - q && \Leftrightarrow\\
&A_n = q{\cdot}((1 + r)^n - 1) && \Leftrightarrow\\
&A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n - 1}{r} && \text{Annuitetsformlen}
\end{aligned}
$$

Afvikling af gæld er også opsparing. Så lad os vende (1) om.

$$K_0 = K_n(1 + r)^{-n} \qquad (1')$$

eller

$$S_0 + q = (S_n + q)(1 + r)^{-n} \qquad (2')$$

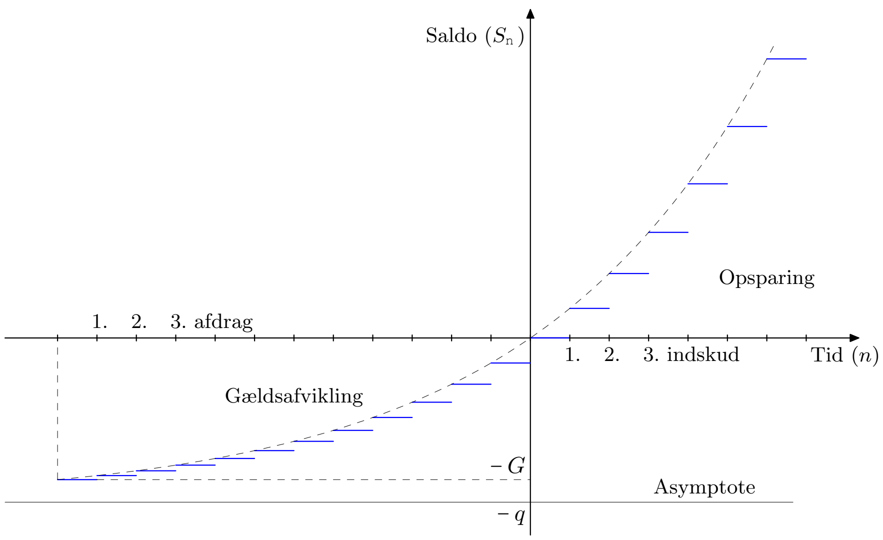
Ved den typiske gældsafvikling er slutsaldoen $S_n = 0$ og startsaldoen negativ, $S_0 = -G$, hvor G er gældens numeriske størrelse. Af (2') får vi så

$$
\begin{aligned}
&-G + q = q{\cdot}(1 + r)^{-n} && \Leftrightarrow\\
&G = q{\cdot}(1 - (1 + r)^{-n}) && \Leftrightarrow\\
&G = y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} && \Leftrightarrow\\
&y = G\cdot\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} && \text{Gældsformlen}
\end{aligned}
$$

Vi har set, at formlerne for opsparing og gæld kan udledes af den samme formel – formel (2).

I øvrigt vokser afdragene på en gældsafvikling eksponentielt, hvilket skyldes, at det n'te afdrag $S_n - S_{n-1}$ er en differens for udtrykket $S_n + q$, der er eksponentiel i følge (2).

Nærværende figur viser den stykkevis konstante graf for saldoen ledsaget af den eksponentielt forløbende graf, der følger terminsværdierne. Visuelt er grafen med til at understrege, at der ikke er nogen væsensforskel på opsparing og gældsafvikling. Det er to sider af samme sag, så længe det er samme rentefod.



Matematik