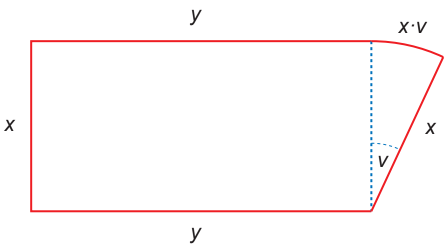
En optimeringsopgave, 3

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium & ALIJA MUMINAGIĆ, Nykøbing F.

I fortsættelse af artiklen i LMFK–Bladet 4 (september 2013) ser vi på endnu et par optimeringsopgaver, der viser sig at have overraskende resultater.

Det er velkendt, at hvis et rektangel med bredde x og længde y har en fast omkreds s, opnås dets maksimale areal, hvis $x = y$. I så fald er $x + y = \frac{1}{2}s$ og $x = y = \frac{1}{4}s$ og arealet er $\frac{1}{16}s^2$.



Nu ser vi på en figur, der er sammensat af et rektangel med bredde x og længde y og et cirkeludsnit med radius x og centervinkel v (målt i radianer). Vi ønsker at løse følgende:

Opgave. Hvad er det størst mulige areal af figuren, hvis dens omkreds er fast?

Løsning. Vi forudsætter, at $0 < v \le \frac{3}{2}\pi$ for at undgå overlapning. Omkredsen er da

$$s = 2x + 2y + x \cdot v \quad \text{så} \quad y = \tfrac{1}{2}\left(s - 2x - x \cdot v\right)$$

Cirkeludsnittet udgør en brøkdel på $\frac{v}{2\pi}$ af en hel cirkel, så dets areal er

$$\frac{v}{2\pi} \cdot \pi x^2 = \tfrac{1}{2} v \cdot x^2$$

og hele områdets areal er derfor

$$A = x \cdot y + \tfrac{1}{2} v \cdot x^2 = \tfrac{1}{2} x\left(s - 2x - x \cdot v\right) + \tfrac{1}{2} v \cdot x^2 = \tfrac{1}{2} x\left(s - 2x\right)$$

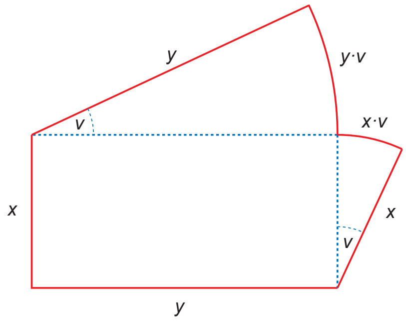
Maksimum for dette andengradspolynomium fås for $x = \frac{1}{4}s$ og arealet er da

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} s \cdot s - \tfrac{1}{16} s^2 = \tfrac{1}{16} s^2$$

dvs. dette resultat er overraskende nok det samme som for rektanglet alene.

Vi modificerer det oprindelige problem endnu en smule og ser på følgende opgave, som også har et noget overraskende resultat:

Opgave 2. Hvad er det størst mulige areal af en figur bestående af et rektangel med bredde x og længde y, hvis der på to af rektanglets sider er påsat et cirkeludsnit med lige store centervinkler v, forudsat at figuren har fast omkreds?



Løsning. Igen forudsætter vi, at $0 < v \le \frac{3}{2}\pi$. Den faste omkreds er

$$s = 2x + 2y + x \cdot v + y \cdot v = (v+2)(x+y)$$

Arealet er

$$A = x \cdot y + \tfrac{1}{2} v\left(x^2 + y^2\right) = x \cdot y + \tfrac{1}{2} v\left((x+y)^2 - 2xy\right)$$
$$= xy(1-v) + \frac{1}{2} v \cdot \frac{s^2}{(v+2)^2}$$

Vi har, at

$$x + y = \frac{s}{v+2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{s}{v+2} - x$$

så vi får

$$A = x(1-v) \cdot \left(\frac{s}{v+2} - x\right) + \frac{v \cdot s^2}{2(v+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = (v-1)x^2 + \frac{s(1-v)}{v+2} x + \frac{v \cdot s^2}{2(v+2)^2} \qquad (1)$$

Nu deler vi op i tilfælde efter størrelsen af vinklen v.

I. Hvis $0 < v < 1$ fremstiller dette en parabel med grenene nedad, så funktionen får et maksimum for

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{(v-1)s}{(v+2) \cdot 2(v-1)} = \frac{s}{2(v+2)} \qquad \text{hvoraf}$$

$$y = \frac{s}{v+2} - \frac{s}{2(v+2)} = \frac{s}{2(v+2)} = x$$

Igen er altså rektanglet et kvadrat.

II. Hvis $v = 1$, er $A = \frac{v \cdot s^2}{2(v+2)^2} = \frac{s^2}{18}$, dvs. arealet er konstant.

III. Hvis $1 < v < \frac{3}{2}\pi$, fremstiller (1) en parabel med grenene opad, og funktionen antager altså en minimumsværdi, når $x = y = \frac{s}{2(v+2)}$.

Henvisning

Nick Lord, *Two surprising maximization problems*, The Mathematical Gazette, November 2013.