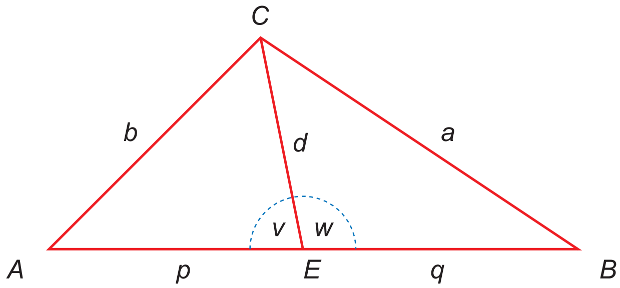
Notits om Matthew Stewarts sætning

Poul Rose, Vordingborg

Jens Carstensen og Alija Muminagic fortjener tak, fordi de trak Stewarts sætning frem i lyset, se LMFK–bladet 6/2013 side 24. Herunder ses en alternativ formulering af beviset.

På figuren er E er et tilfældigt punkt på siden AB. Længden af liniestykket CE betegnes med d. AE betegnes med p og EB med q. $p + q = c$. v og w er supplementvinkler.



Anvendes cosinusrelationen på trekanterne ACE og BCE, kan man finde udtryk for $\cos v$ og $\cos w$:

$$\cos v = \frac{p^2 + d^2 - b^2}{2 \cdot d \cdot p} \quad \text{og} \quad \cos w = \frac{q^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot d \cdot q}$$

Alment gælder, at $\cos v + \cos w = 0$. Heraf følger, at man kan sætte lighedstegn mellem de to brøker, hvis man ændrer fortegn for den ene, for eksempel den sidste. Samtidig dropper man 2 og d i nævnerne.

$$\frac{p^2 + d^2 - b^2}{p} = \frac{a^2 - q^2 - d^2}{q}$$

I denne ligning ligger Stewarts sætning gemt. Man skal blot isolere d^2. Det kan for eksempel ske ved at gange over kors:

$$q \cdot p^2 + q \cdot d^2 - q \cdot b^2 = p \cdot a^2 - p \cdot q^2 - p \cdot d^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$q \cdot p^2 + p \cdot q^2 + q \cdot d^2 + p \cdot d^2 = p \cdot a^2 + q \cdot b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(p+q) \cdot p \cdot q + (p+q) \cdot d^2 = p \cdot a^2 + q \cdot b^2$$

Da $p + q = c$ har man $c \cdot p \cdot q + c \cdot d^2 = p \cdot a^2 + q \cdot b^2$.

Isoleres d^2, får man $d^2 = \frac{p \cdot a^2 + q \cdot b^2}{c} - p \cdot q$, hvilket er Stewarts sætning.

Med denne sætning i hænde er vejen til længden af en median særdeles kort. Man skal blot erstatte p med $½ \cdot c$ og ligeledes q med $½ \cdot c$. Efter lidt reduktionsarbejde, får man følgende resultat:

$$m_C{}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \quad \text{og analogt hermed}$$

$$m_B{}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad \text{og} \quad m_A{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Omvendt er det muligt at regne sig frem til siderne, når medianerne er givet: Formlerne opfattes som 3 ligninger med de 3 ubekendte: a^2, b^2, c^2. Med sædvanlige eliminationsmetoder finder man, at

$$a^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(2 \cdot m_B{}^2 + 2 \cdot m_C{}^2 - m_A{}^2\right)$$

For b^2 og c^2 fås analoge udtryk.

Med Stewarts sætning kan man også finde d, når E deler siden AB i stykker, der forholder sig på anden måde end som 1 til 1, for eksempel som 3 til 7, $p{:}q = 3{:}7$.

Så er $p = \frac{3 \cdot c}{10}$ og $q = \frac{7 \cdot c}{10}$. Indsættes, får man efter reduktion

$$d^2 = \frac{3 \cdot a^2 + 7 \cdot b^2}{10} - \frac{21 \cdot c^2}{100}$$

Et andet eksempel har man, når E deler AB i det gyldne snits forhold. Liniestykket AB har to gyldne snit. Hvis E er det gyldne snit nærmest A, er $q = p \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Sammenholdes dette med $p + q = c$, har man to ligninger, der giver

$$p = \frac{2 \cdot c}{\sqrt{5}+3} \quad \text{og} \quad q = \frac{(\sqrt{5}+1) \cdot c}{\sqrt{5}+3}$$

Disse udtryk kan reduceres til

$$\text{p} = \frac{(3-\sqrt{5}) \cdot c}{2} \quad \text{og} \quad \text{q} = \frac{(\sqrt{5}-1) \cdot c}{2}$$

Indsættes i Stewarts formel, fås efter reduktion:

$$d^2 = \frac{(3-\sqrt{5}) \cdot a^2 + (\sqrt{5}-1) \cdot b^2}{2} - (\sqrt{5}-2) \cdot c^2$$

Hvis E er det gyldne snit nærmest B, er $p = q \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ved analoge beregninger får man

$$d^2 = \frac{(\sqrt{5}-1) \cdot a^2 + (3-\sqrt{5}) \cdot b^2}{2} - (\sqrt{5}-2) \cdot c^2$$

For en ligebenet trekant, hvor $a = b$, kollapser disse to voluminøse udtryk til noget meget enkelt. Og til noget enslydende, som forventet. Man har:

> I en ligebenet trekant med benlængde b og grundlinie c gælder for afstanden d mellem toppunktet og et af de gyldne snit i grundlinien, at $d^2 = b^2 - (\sqrt{5}-2) \cdot c^2$.

Formlen for længden af en vinkelhalveringslinie kan også udledes af Stewarts sætning, jf. LMFK–bladet 1/2014 side 22.