Tangensrelationerne - et pust fra fortiden

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

I gamle dage, dvs. før indførelsen af lommeregnere midt i 1970'erne, foregik numeriske beregninger som bekendt ved hjælp af logaritmer, også trekantberegninger.

I det såkaldte *første trekanttilfælde*, hvor de tre sider a, b og c i trekanten er kendt, benyttede man cosinusrelationerne, hvis a, b og c er 'pæne' tal. Ellers benyttede man de såkaldte *logaritmiske formler*, der indeholdt elementer, der var egnet til logaritmeberegninger, dvs. produkter, brøker og kun enkelte summer og differenser.

Den tids trigonometriske formelmaskineri indeholdt formler (med beviser!) for den halve vinkel:

$$\cos^2\tfrac{A}{2} = \tfrac{1}{2}\left(1+\cos A\right) \quad , \quad \sin^2\tfrac{A}{2} = \tfrac{1}{2}\left(1-\cos A\right)$$

og hvis vi betegner trekantens omkreds med $2s$, har vi

$$\cos^2\tfrac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}$$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos^2\tfrac{A}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{2s(2s-2a)}{4bc} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

og

$$\sin^2\tfrac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}$$

$$= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

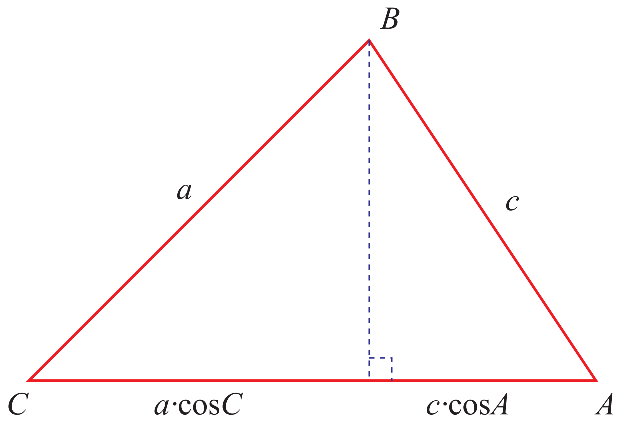
$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}$$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

Af dette fås

$$\tan^2\tfrac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

Heraf udregnes brøken med logaritmer og dermed fås vinklen A. Tilsvarende formler gennemregnes for at finde B og C.



I *andet trekanttilfælde*, hvor en vinkel og de hosliggende sider er kendt, fx A, b og c, finder vi, at sinusrelationerne giver

$$a \cdot \sin C = c \cdot \sin A$$

og da vi desuden ved at betragte højden fra B har, at

$$a \cdot \cos C = b - c \cdot \cos A$$

får vi ved division:

$$\tan C = \frac{c \cdot \sin A}{b - c \cdot \cos A} .$$

Dette er de såkaldte *tangensrelationer*. På højre side i den sidste formel optræder kun de kendte størrelser A, b og c.

En formel, der er specielt egnet til beregning med logaritmer, får vi ved at bruge de velkendte regler for brøkregning:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B - \sin C}{b - c} = \frac{\sin B + \sin C}{b + c}$$

og de sidste to brøker giver med de kendte logaritmiske formler:

$$\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{b-c} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{b+c}$$

hvoraf

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

og da $\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$, kan vi skrive

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

Igen optræder de kendte størrelser A, b og c på højre side. Vi kan derfor finde $\frac{B-C}{2}$ og dermed $B - C$. Desuden har vi $B + C = 180° - A$, og ved addition og subtraktion af ligningerne $B - C = \ldots.$ og $B + C = 180° - A$, kan B og C findes. Derefter beregnes a ved sinusrelationen.

Ingen af disse kuriøse formler 'lever' selvfølgelig i dag. Vi kan af ovenstående formler let få Herons formel for trekantens areal T. Vi har nemlig

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvoraf

$$T = \frac{1}{2}bc\cdot\sin A = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Radius r i trekantens indskrevne cirkel fås af formlen $T = r \cdot s$, så

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Denne formel optrådte også i forne tiders gymnasielærebøger i matematik.

Henvisninger

Mark Dabbs, *Elementary Triangle Geometry*, mfdabbs.com, April 2004.
A. F. Andersen & Poul Mogensen, *Lærebog i Matematik I*, Gyldendal, 1960.
E. Juul & E. Rønnau, *Lærebog i Matematik I*, Ejnar Munksgaard, 1954.
H. J. Pihl & Sigurd Kristensen, *Lærebog i Matematik I*, Gyldendal, 1926.