Om arealer ved parabler

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Alija Muminagić, Nykøbing F.

Parablen med ligningen $y = ax^2$ skæres med den vandrette linje $y = k$. Arealet P af området i parablens 'indre' er med figurens betegnelser

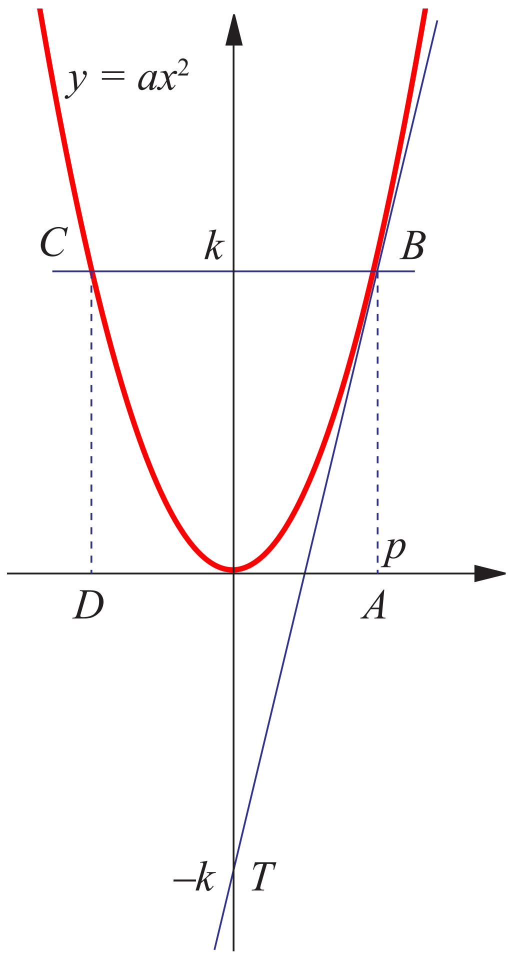
$$P = 2kp - 2\int_0^p ax^2\,dx = 2kp - \tfrac{2}{3}ap^3$$

og da $k = ap^2$ er

$$P = 2kp - \tfrac{2}{3}ap^2 \cdot p = 2kp - \tfrac{2}{3}kp = \tfrac{4}{3}kp$$

Arealet R af rektanglet $ABCD$ er $R = 2pk$, så

$$P : R = 4 : 6$$



Tangenten til parablen i punktet B (p, k) skærer y–aksen i $(0,–k)$, idet det er en velkendt egenskab ved parablen, at dens toppunkt er midtpunkt af linjestykket udspændt af projektionen af tangentens røringspunkt på parabelaksen og tangentens skæringspunkt med aksen.

Arealet T af det trekantede område, der begrænses af parabeltangenten i (p, k), y–aksen og linjen $y = k$, er derfor $T = kp$, så

$$T : P = 3 : 4$$

Vi har dermed det smukke resultat:

$$T : P : R = 3 : 4 : 6.$$