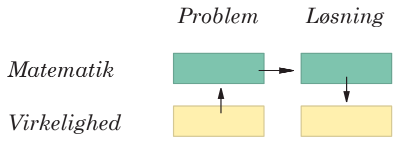
Fra bevis-matematik til definitions-matematik

Allan Tarp, VUC Aarhus

Med gymnasiereformen i 2005 skete der et skift fra lærebogs–matematik til kompetence–matematik. Alligevel eksisterer lærebøgerne i bedste velgående – måske fordi det aldrig blev helt klart, hvad der menes med kompetencematematik.

Ophavsmanden til begrebet, professor Mogens Allan Niss, definerer kompetencer som indsigtsbaseret handleparathed. Dvs. man skal kunne handle med den matematik, man får indsigt i. Spørgsmålet er blot, indsigt i hvad: i begreber eller i sætninger, i definitioner eller i beviser? Faldgruppen er at fastholde den fagopfattelse, at matematik er en samling af velbeviste udsagn om veldefinerede begreber. 'Altså i gang med lærebogen, der jo indeholder begge, og så bliver der nok tid til lidt anvendelser til sidst. For naturligvis skal matematik da læres, før den kan anvendes, man kan jo ikke anvende noget, man ikke har lært, det siger da sig selv. Og alle ved, hvor store problemer eleverne har med at tilegne sig lærebogens 300 siders matematik. Så der bliver nok ikke megen tid til anvendelser, selv om det er en smuk tanke.'
Opfattes indsigt som indsigt i beviser, bliver det svært at skelne mellem kompetence–matematik og traditionel lærebogs–matematik. Man bør derfor opfatte indsigt som indsigt i definitioner. Så er der god tid til at handle med både begreber og formler i projekter gennem modelbygningens tre faser:



Eksempel: Et firma præsenterer en problemstilling om udviklingen af en kapital, som angives til to forskellige tidspunkter: Hvad vil kapitalen være til et andet tidspunkt, og hvornår når kapitalen et vist niveau?

Som rådgivere oversætter vi tabellen til en formel, der ved indsættelse af de angivne tal bliver til en ligning, som så løses, hvorefter løsningen præsenteres ved et møde med firmaets direktør og bestyrelsesformand, der stiller uddybende og supplerende spørgsmål. Men for at kunne handle som rådgivere skal vi være i besiddelse af en vis indsigt.

Vi skal have indsigt i, hvordan tal er opbygget som en areal–sum (integration) af stakke, der er fremkommet ved at optælle en total T i bundter, bundt–bundter, bundt–bundt–bundter osv., typisk i tiere, ti–tiere og ti–ti–tiere (hundreder og tusinder):

$$\begin{aligned} T &= 345 \\ &= 3 \text{ ti–tiere} + 4 \text{ tiere} + 5 \text{ enere} \\ &= 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1 \end{aligned}$$

Vi skal have indsigt i, at denne mangeleds–formel (polynomium) indeholder alle fire måder at forene tal på, svarende til, at algebra betyder genforening på arabisk: gange forener konstante tal, potens forener konstante faktorer (per–tal), lodret plus forener variable tal, og vandret plus (integration) forener variable faktorer (per–tal) som arealer.

Vi skal have indsigt i, at hver foreningsmåde har en modsat opdelingsmåde: Opdelingen '8 = ? + 3' (ligningen $8 = x + 3$) løses af tallet $x = 8 – 3$, som netop per definition er det tal, der lagt til 3 giver 8.

Tilsvarende løses ligningerne $8 = x\cdot 3$, $8 = x^3$ og $8 = 3^x$ af tallene $x = 8/3$, $x = 3\sqrt{8}$ og $x = \log_3(8)$, altså igen ved at flytte tal til modsat side med modsat regnetegn. Her betegner rod √ en faktor–finder, og logaritme log en faktor–tæller.

Vi skal have indsigt i, at mangeleds-formlen indeholder en række standardformler: $T = a\cdot x$ (proportionalitet), $T = b + a\cdot x$ (konstant absolut lineær vækst), $T = b\cdot a^x$ (konstant relativ eksponentiel vækst), $T = b\cdot x^a$ (konstant elastisk potensvækst), samt $T = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ (konstant accelereret vækst, eller lineær vækst med konstant voksende væksta).

Vi skal have indsigt i, at en formel, der indeholder to ubekendte variable tal, kaldes en funktion, som kan tabellægges og grafes. Og at en formel med én ubekendt variabel kaldes en ligning, som kan løses manuelt ved at flytte til modsat side med modsat regnetegn, eller med en formelregner, hvor venstre og højre side indtastes som hhv. Y_1 og Y_2. Herefter findes løsningen algebraisk som 'solve $Y_1 – Y_2 = 0$', eller geometrisk ved at lokalisere skæringspunkterne for Y_1 og Y_2.

Vi skal have indsigt i, at når et tal T ændrer sig fra T_1 til T_2, kan ændringen beskrives som væksttal $T_2 – T_1$, som vækstfaktor T_2/T_1, eller som vækstprocent $(T_2 – T_1)/T_1 = T_2/T_1 – 1$.

Vi skal have indsigt i, at $T = a\cdot x$ og $T = b + a\cdot x$ har konstant væksttal, så T ændres med a når x ændres med 1. Og at $T = b\cdot a^x$ har konstant vækstfaktor og vækstprocent, så T ændres med vækstfaktoren a og vækstprocenten $a – 1$ når x ændres med 1. Og at $T = b\cdot x^a$ har konstant elasticitet, dvs. konstant forhold mellem vækstprocenterne for x og T, så T tilnærmelsesvis ændres med vækstprocenten a når x ændres med 1 %. Og at $T = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ har konstant voksende væksttal a, krumningstallet, som er negativt og positivt, når grafen krummer nedad og opad. Udover denne interne indsigt skal vi også have indsigt i ekstern kommunikation med brugere og regneteknologi.

Med brugeren skal vi kunne føre en dialog om hvilken vækstform, modellen skal anvende. Forventes kapitalen at vokse med et konstant årligt væksttal, eller med en konstant årlig vækstprocent? Eller med et voksende eller faldende årligt væksttal, for så skal vi have endnu et talsæt for at kunne se ændringen i væksttallet. Dialogen omfatter ikke potensvækst, som forudsætter, at de to måltal har et fast nulpunkt, og det har tiden jo ikke.

Efter at have aftalt vækstformen 'konstant årlig vækstprocent' med brugeren, kan vi opstille det matematiske problem: Der er givet en formel $T = b \cdot a^x$, hvor vi skal finde T når x er 8 og finde x når T er 200, samt en tabel med to kendte talsæt for x og T, fx (2, 120) og (6,150). Disse talsæt giver ved indsættelse i formlen to ligninger med to ubekendte: $120 = b \cdot a^2$ og $150 = b \cdot a^6$.

I modelbygningens anden fase kommunikerer vi med regneteknologien for at finde en løsning til det matematiske problem. Geometrisk kan vi isolere b og finde skæringspunktet mellem de to b–grafer. Algebraisk kan vi solve de to ligninger med to ubekendte. Endelig kan tabellen indtastes og omdannes til en funktion ved eksponentiel regression, $T = 107 \cdot 1{,}057^x$. Vi tester korrektheden af teknologiens svar med de kendte talsæt:

$T = 107 \cdot 1{,}057^2 = 119{,}5$ og
$T = 107 \cdot 1{,}057^6 = 149{,}2$

Funktionen omdannes til en ligning ved at indsætte de angivne tal:

$T = 107 \cdot 1{,}057^8 = 166{,}7$ og
$200 = 107 \cdot 1{,}057^x$ med løsning $x = 11{,}3$

Vi går nu over til modelleringens sidste fase, dialogen med brugeren om den fundne løsning, og spørgsmålet om brugeren ønsker en ny model med alternative antagelser.

Vi fortæller, at kapitalen er på 166,7 efter 8 år, og at den er 200 efter 11,3 år. Som baggrund oplyser vi, at med de givne antagelser har regneteknologien opstillet formlen $T = 107 \cdot 1{,}057^x$, som angiver et starttal på 107 og en årlig vækstprocent på 5,7%, idet et tillæg på 5,7% gør kapitalen 105,7% gange så stort årligt, svarende til en fordoblingstid på 12,5 år. Hvis brugeren betvivler denne fordoblingstid, da 10 års vækst kun giver $10 \cdot 5{,}7\ \% = 57\ \%$, skal vi kunne redegøre for, at med årlig vækstprocent vokser både starttallet og væksten, svarende til rente og rentes–rente i en bank. Væksten på 100 % indeholder derfor både den simple rente på $12{,}5 \cdot 5{,}7\ \% = 71{,}3\ \%$ samt de resterende 28,7 % som rentes–rente.

På spørgsmålet om der også findes en fordoblingstid ved konstant årligt væksttal, skal vi kunne redegøre for, at vækstprocent fører til gangevækst, hvor kapitalen årligt ganges op med et bestemt tal, og hvor fordoblingstiden vil gange op med tallet 2 svarende til en vækst på 100 %. Derimod fører væksttal til plusvækst, hvor kapitalen årligt plusses op med et bestemt tal, og hvor man i stedet kan spørge til 'cent–tiden', altså den tid, der skal til for at plusse op med 100 enheder.

Med lærer og censor som direktør og bestyrelsesformand kan denne præsentationsform bruges til mundtlig eksamen, som jo skal give den lærende dokumentation for graden af læring, altså graden af tilegnet matematik–kompetence. Og hele fagets stofområde kan uden vanskelighed dækkes af modeller, som vist på Mellemskolen.net, der indeholder instruktive YouTube videoer, projekter og kompendier til både niveau A, B og C, suppleret med et ekstra eksamensspørgsmål i fagets historie og erkendelsesmetode, hvor den lærende på niveau A og B skal fremlægge selvvalgte beviser fra oldtid, middelalder og nutid.

Kompetencematematikken har nu brugt næsten et tiår til at træde sine barnesko. Skal vi ikke give hinanden hånden på, at nu skal den indføres fuldt ud i overensstemmelse med lovteksten? Så fremover: kun projektfremlæggelse til mundtlig eksamen på både niveau A, B og C? Det vil redde den mundtlige eksamen, som er under voldsom international kritik, da vi er det eneste land i verden, stort set, som afholder mundtlig eksamen, også i matematik. Svenskerne ryster på hovedet: 'Hvis regnefag som matematik og fysik skal vurderes gennem en mundtlig eksamen, må det da skræmme drenge langt væk fra ingeniørfaget?' Hvilket man desværre må give dem ret i.

Kun med kompetencematematik har mundtlig eksamen berettigelse, og kun med lærer og censor i rollen som direktør og bestyrelsesformand.

Så er vi enige: Ingen lærebøger efter 2015!