Andengradsligningens komplekse rødder

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Hvis et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ har negativ diskriminant $d = b^2 - 4ac$, er de to komplekse rødder

$$\frac{-b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{-d}}{2a}$$

Det viser sig, at vi kan tolke dette resultat geometrisk.

Antag, at $a > 0$ og $d < 0$, så grafen for f ligger helt over x–aksen. Vi danner spejlbilledet af parablen i dens vandrette tangent i toppunktet. Hvis den funktion, der har denne parabel som graf, betegnes $g(x)$, er altså

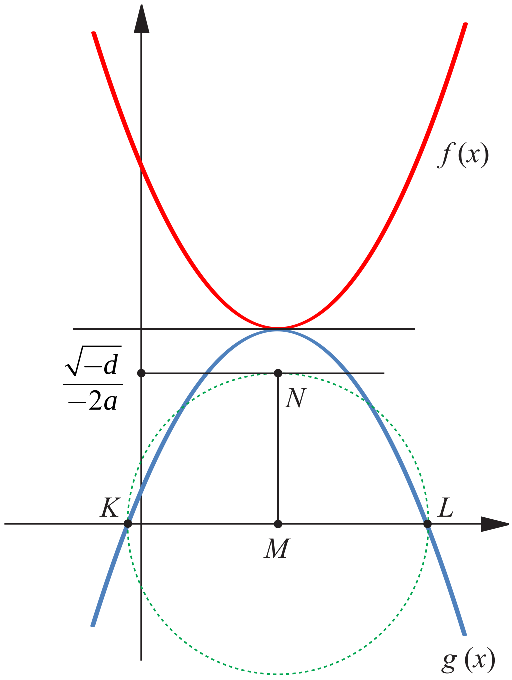
$$\tfrac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big) = \tfrac{-d}{4a} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)+g(x) = \tfrac{-d}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) = -f(x) - \tfrac{d}{2a} = -ax^2 - bx - c - \tfrac{d}{2a}$$

Rødderne for funktionen g er

$$x_1\ , x_2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot(-a)\cdot(-c - \frac{d}{2a})}}{-2a}$$

$$= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac - 2d}}{-2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-d}}{2a}$$



Disse er altså x–koordinaterne til skæringspunkterne K og L mellem parablen og x–aksen. Midtpunktet M af linjestykket KL har derfor x–koordinaten $-\frac{b}{2a}$ og længden af ML er

$$\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{\sqrt{-d}}{-2a}$$

Hvis vi tegner en cirkel med diameter KL, vil den vinkelrette linje på KL i M skære cirklen i N, og

$$MN = ML = \frac{\sqrt{-d}}{-2a}$$

Dermed er realdelene $\frac{-b}{2a}$ og imaginærdelene $\pm\frac{\sqrt{-d}}{2a}$ fastlagt på figuren.

Hvis fx $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ er $d = -6$,

så rødderne er $x_1\ ,\ x_2 = 2 \pm i\sqrt{6}$.

Vi får, at $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

med rødderne $2 \pm \sqrt{6}$.

Henvisning

Anita Schuloff & Mark Bonanomi, *Where on the graph are the complex roots?*, Mathematics Teacher, April 2013.

Matematik