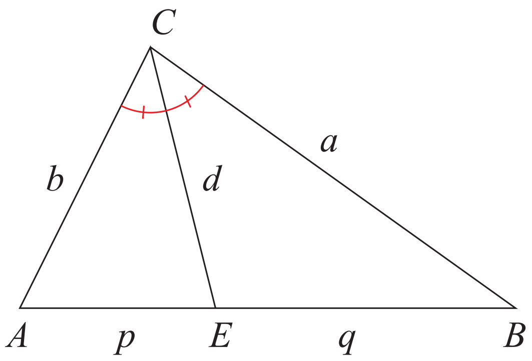
En anvendelse af Matthew Stewarts sætning

Poul Rose, Vordingborg

Formlen for længden af en vinkelhalveringslinie kan udledes af Stewarts sætning.
I LMFK–bladet 6/2013 gav Jens Carstensen og Alija Muminagic et bevis for Stewarts sætning, hvis indhold kort gengives her.



I trekant ABC er E et tilfældigt punkt på siden AB. Længden af liniestykket CE betegnes med d. AE betegnes med p og EB med q. $p + q = c$. Så siger Stewarts sætning:

$$d^2 = \frac{q \cdot b^2 + p \cdot a^2}{c} - p \cdot q \qquad \text{(I)}$$

Vi benytter nu, at sætningen gælder for enhver beliggenhed af E mellem A og B. Lad E køre hen i endepunktet for vinkel C's vinkelhalveringslinie. Så skriver vi v_C i stedet for d. En vinkelhalveringslinie deler den modstående side i stykker, der forholder sig som de sider, der danner den pågældende vinkel.

Man har 3 ligninger:

$$v_C{}^2 = \frac{q \cdot b^2 + p \cdot a^2}{c} - p \cdot q \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{a} \qquad \text{(III)}$$

$$p + q = c \qquad \text{(IV)}$$

Ligning (III) og (IV) kan opfattes som to ligninger med to ubekendte p og q .

Løsningerne er:

$$p = \frac{b \cdot c}{a + b} \quad \text{og} \quad q = \frac{a \cdot c}{a + b}$$

Principielt kan man nu eliminere p og q i ligning (II). Det giver anledning til en del reduktionsarbejde, der slutter med følgende resultat:

$$v_C{}^2 = a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) \qquad \text{(V)}$$

Analogt får man:

$$v_B{}^2 = a \cdot c \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right) \qquad \text{(VI)}$$

$$v_A{}^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \qquad \text{(VII)}$$

Når siderne er givet, kan man med disse formler direkte beregne vinkelhalveringslinierne uden at nørkle med trigonometri. Omvendt er det svært at komme frem til siderne, når vinkelhalveringslinierne er givet.

Hvis man for eksempel ganger (V) med $(a + b)^2$, dukker a^3 op på højre side. Formlerne kan dog bruges til beregning af en side i visse tilfælde. Eksempel: Givet $a = 7$, b = 13 og $v_C = 9$. Find c.

Når de givne størrelser indsættes i (V) finder man, at c er den eneste ubekendte. Facit bliver 6,630.