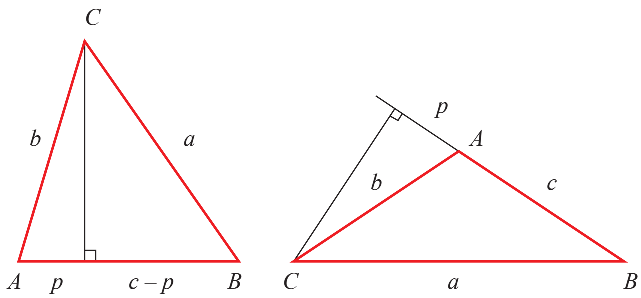
Carnots sætning

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Alija Muminagić, Nykøbing F.

I en trekant gælder den såkaldte *Carnots sætning* (Lazare Nicolas Carnot, fransk matematiker, 1753–1823), som i en lidt gammeldags sprogdragt lyder sådan:

1. Kvadratet på en side overfor en spids vinkel er lig med summen af de to andre siders kvadrater formindsket med det dobbelte produkt af den ene af disse sider projiceret på den anden og den anden.

2. Kvadratet på en side overfor en stump vinkel er lig med summen af de to andre siders kvadrater forhøjet med det dobbelte produkt af den ene af disse sider projiceret på den anden og den anden.



Med symboler fra figurerne lyder Carnots sætning altså sådan i de to tilfælde:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot p \quad \text{og} \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2\cdot c\cdot p$$

I moderne sprogbrug er dette selvfølgelig blot cosinusrelationen.

Eksempel

Vi kan finde længden af medianen fra C. Hvis midtpunktet af siden AB er M og projektionen af C på AB er D, sætter vi $p = AD$. I ΔACM er så efter Carnots sætning

$$m^2 = b^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot p \quad \Leftrightarrow$$
$$m^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - cp \tag{1}$$

Carnots sætning anvendt i ΔMBC giver, idet $DM = \tfrac{1}{2}c - p$:

$$a^2 = m^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot\left(\tfrac{1}{2}c - p\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$m^2 = a^2 - \tfrac{3}{4}c^2 + cp \tag{2}$$

Addition af (1) og (2) giver

$$2m^2 = a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}c^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$m^2 = \tfrac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$

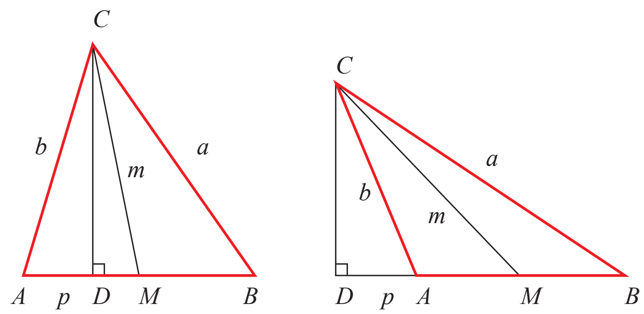
hvilket er den kendte formel for længden af en median.

Hvis projektionen D af C på AB ikke ligger på AB, men uden for, giver Carnots sætning i ΔACM:

$$m^2 = b^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot p \quad \Leftrightarrow$$
$$m^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + cp$$

og i ΔCMB er

$$a^2 = m^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot\left(p + \tfrac{1}{2}c\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$m^2 = a^2 - \tfrac{3}{4}c^2 - cp$$



Addition af de sidste to ligninger giver

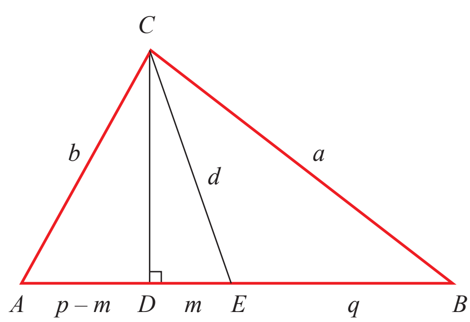
$$2m^2 = a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}c^2$$

hvilket er ensbetydende med det ønskede.

Eksempel

Vi viser *Stewarts sætning* (Matthew Stewart, 1717–1785, skotsk matematiker). Vi trækker en transversal fra C til et punkt E på siden AB. Sæt $p = AE$ og $q = EB$ og lad D være projektionen af C på AB. Så er transversalens længde d givet ved formlen

$$d^2 = \frac{qb^2 + pa^2}{c} - pq$$



Vi sætter $m = DE$, så $AD = p - m$. I ΔAEC gælder så efter Carnots sætning:

$$d^2 = b^2 + p^2 - 2p\cdot(p - m) \quad \Leftrightarrow$$
$$b^2 = d^2 + p^2 - 2pm$$

I ΔBEC giver Carnots sætning

$$a^2 = d^2 + q^2 + 2q \cdot m$$

Disse formler multipliceres med q og p, så vi får

$$qb^2 = qd^2 + qp^2 - 2pmq \qquad \text{og}$$
$$pa^2 = pd^2 + pq^2 + 2pmq$$

Addition giver

$$qb^2 + pa^2 = (p+q)d^2 + pq(p+q) \quad \Leftrightarrow$$
$$qb^2 + pa^2 = cd^2 + pqc$$

og dette er ensbetydende med det ønskede.

Andengradspolynomiets faktoropløsning

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Vi skal se på et par ikke så kendte egenskaber i forbindelse med andengradspolynomiets faktoropløsning.

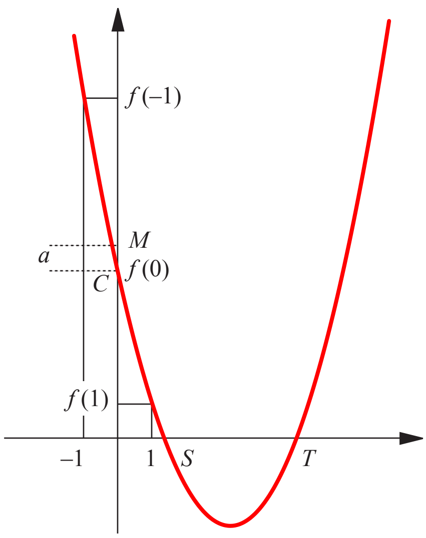
Hvis rødderne i polynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad d = b^2 - 4ac > 0$$

betegnes r og s er

$$f(x) = a(x-r)(x-s)$$

På figuren viser det sig (måske overraskende), at de tre faktorer, a, $x-r$ og $x-s$ kan aflæses på en forholdsvis simpel måde.



Vi får, at

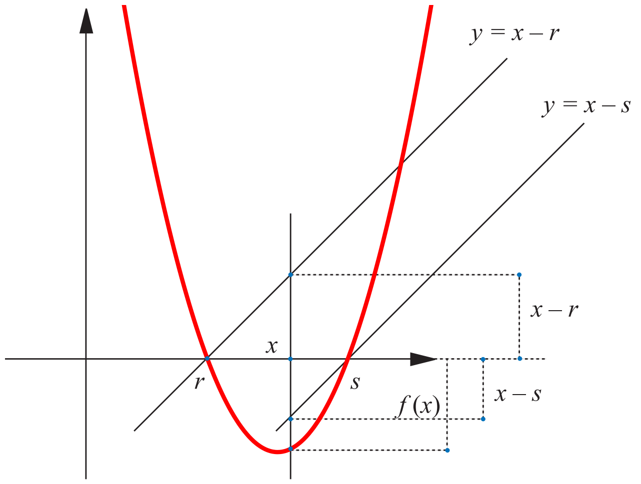
$$f(1) = a + b + c \quad , \quad f(-1) = a - b + c \quad , \quad f(0) = c$$

Så er $f(1) + f(-1) = 2a + 2c$ og dermed

$$a = \tfrac{1}{2}\big(f(1) + f(-1)\big) - f(0)$$

Hvis M er midtpunktet af det linjestykke på y–aksen, der udspændes af funktionsværdierne $f(1)$ og $f(-1)$ og C er parablens skæringspunkt med y–aksen, kan vi altså aflæse a som afstanden (regnet med fortegn) mellem C og M.

Vi tegner linjerne med ligningerne $y = x - r$ og $y = x - s$, som har hældning 1 og skærer x–aksen i polynomiets rødder.



Vælg nu et vilkårligt punkt på x–aksen med x–koordinat x. Af ligebenede retvinklede trekanter kan vi på figuren finde linjestykker af længde $x-r$ og $x-s$ (regnet med fortegn).

På figuren har vi nu fundet linjestykker med længder (regnet med fortegn) på a, $x-r$ og $x-s$ som ønsket.

Som kuriosum kan vi desuden nævne, at en udregning giver, at

$$b = f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

så koefficienten b kan aflæses som afstanden mellem de punkter på y–aksen, der svarer til funktionsværdierne $f\left(\tfrac{1}{2}\right)$ og $f\left(-\tfrac{1}{2}\right)$.

Henvisning

Đuro Kurepa & Branko Pavlović: *Algebra za II Razred Gimnazie*, Školska Knjiga, Zagreb, 1964.