

# En dialog mellem moderne og postmoderne matematik

Allan Tarp, VUC Aarhus

Ved det netop afholdte inspirationskursus for matematik C fik jeg mulighed for at illustrere områdets problematik med nedenstående dialog mellem to fagopfattelser: Et moderne top-down fagsyn, der anser mængdebaseret som matematikkens natur, og et post-

moderne bottom-up fagsyn, der som antikkens sofister skelner mellem natur og vedtægt for at undgå skjult formynderi i form af vedtægt præsenteret som natur, og som derfor ser matematik som en naturvidenskab om det naturlige fænomen Mange.

## Top-down

vs.

## Bottom-up

### Hvad er et tal?

Talmængderne er: De naturlige tal  $N$ , de hele tal  $Z$ , de rationale tal  $Q$  og de reelle tal  $R$ .

De naturlige tal frembringes af tallet 0 og et efterfølgerprincip. De hele tal er ækvivalensklasser i produktmængden  $N \times N$  skabt af ækvivalensrelationen

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ hvis } a + d = b + c$$

$2 + 3$  og  $1 + 4$  og  $5$  er forskellige talnavne for samme tal.

Et tal er et resultat af en optælling af en Total i bundter og bundter af bundter osv., normalt i ti-bundter, fx

$$T = 456 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1$$

Et tal er således en formel, kaldet en mange-led formel, eller et polynomium.

Talformlen viser, at alle tal har enheder (enere, tiere, hundreder osv.).

### Hvad er en brøk?

En brøk er et rationalt tal.

De rationale tal er ækvivalensklasser i produktmængden  $Z \times Z$  skabt af ækvivalensrelationen

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ hvis } a \cdot d = b \cdot c$$

Brøker adderes ved at finde fælles nævner, fx er

$$1/2 + 2/3 = 3/6 + 4/6 = 7/6$$

En brøk er et pertal, fx  $3 \text{ kr}/5 \text{ kg} = 3/5 \text{ kr/kg}$ .

Brøker skal vægtes før addition. Fx kan  $1/2 + 2/3$  give  $(1+2)/(2+3) = 3/5$ , da 1 cola af 2 flasker + 2 colaer af 3 flasker giver 3 colaer af 5 flasker – og naturligvis aldrig nogensinde 7 colaer af 6 flasker.

### Hvad er en regnearter?

En regnearter er en kompositionsforskrift  $\#$  i en talmængde  $M$ , dvs. en funktion mellem produktmængden  $M \times M$  og  $M$ .

En kompositionsforskrift kan være associativ og kommutativ.

En mængde  $M$  med en kompositionsforskrift  $\#$  er en gruppe, hvis

- $\#$  er associativ
- $\#$  har et neutralt element
- hvert element har et inverst element

I en gruppe har ligningen  $a \# x = c$  løsningen  $x = \text{inv}(a) \# c$ .

Regnearter forudsiger resultatet af en forening af tal:

$3 + 5$  forudsiger resultatet af at forene 3 og 5.

$3 \cdot 5$  forudsiger resultatet af at forene 5 3'ere.

$3^5$  forudsiger resultatet af at forene 5 3-faktorer.

Regnearter har modsatte regnearter:

$5 - 3$  forudsiger resultatet af tilbageregningen  $?? + 3 = 5$

$6/3$  forudsiger resultatet af  $?? \cdot 3 = 6$

$\sqrt[3]{64}$  forudsiger resultatet af  $??^3 = 64$

$\log_3(81)$  forudsiger resultatet af  $?^3 = 81$

### Hvad er et regnestykke som $2 + 3 \cdot 4$ ?

En mængde  $M$  organiseret med to kompositionsforskrifter

$\#$  og  $*$  kaldes et legeme, hvis

- $(M, \#)$  og  $(M, *)$  er grupper
- $\#$  er distributiv mht.  $*$

$$\text{dvs. } a \# (b * c) = (a \# b) * (a \# c)$$

I legemet  $(Q, +, \cdot)$  er  $\cdot$  distributiv mht.  $+$ .

Så resultatet  $2 + 3 \cdot 4 = 20$  forudsætter en parentes om  $2 + 3$ .

$2 + 3 \cdot 4$ : en forkortet skrivemåde for  $2 \cdot 1 + 3 \cdot 4$ , dvs. for 2 1'ere og 3 4'ere.

Optalt i tiere bliver resultatet 1.4 ti'ere, som desværre skrives som 14, dvs. uden enhed og med fejlplaceret decimaltegn, hvor decimaltegn normalt adskiller hele enheder og dele deraf.

### Hvad er en funktion?

En funktion mellem to mængder  $A$  og  $B$  er en delmængde af mængdeproduktet  $A \times B$ , hvor komponent1-identitet medfører komponent2-identitet.

eller

En funktion knytter til hvert element i én mængde netop ét element i en anden mængde.

En formel er en størrelse udregnet af et regnestykke.

En funktion er en formel med to ubekendte, typisk den udregnede størrelse og et af de indgående tal.

### Hvad er en ligning?

En ligning er et åbent udsagn om to ækvivalente talnavne. Udsagnets sandhedsmængde findes ved at udføre identiske operationer på de to talnavne og anvende associative, kommutative og distributive love til at omforme talnavnene, indtil den ubekendte er isoleret.

En ligning er en formel med kun én ubekendt, typisk et af de indgående tal.

En ligning løses ved gentagne gange at sætte skjulte parenteser på begge sider, og derefter flytte til modsat side med modsat regnetegn.

Eller ved på CAS at indtaste venstre og højre side som  $Y_1$  og  $Y_2$ , og så solve  $0 = Y_1 - Y_2$ .

### Hvad er en definition?

En definition fremstiller et begreb som et eksempel på en abstraktion, og fremkommer ved at pålægge abstraktionen begrænsninger.

Alle definitioner bygger på mængdebegrebet med den tilhørende mængdeteori.

En definition fremstiller et begreb som en abstraktion fra eksempler til at adskille eksempler fra modeksempler.

Russell viste: Mængdebegrebet er meningsløst på grund af løgnerparadokset:

Hvis  $M = \{A \mid A \notin A\}$

så er  $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$ .

### Hvad er et bevis?

Et bevis er en logisk deduktion fra givne fakta.

Et bevis er mangel på falsifikation.

### Hvad er algebra?

Algebra er kunsten at finde mønstre og strukturer, som så kan beskrives ved hjælp af love som fx. den associative, kommutative og distributive lov.

Man kender ikke ordets oprindelse. Det kan fx stamme fra navnet på en person, eller fra titlen på en bog.

Algebra er et arabisk ord, som betyder at genforene. Der er 4 måder at forene tal: lodret plus, gange, potens og vandret plus (integration), da der er fire forskellige typer tal i verden: Konstante & variable, styktal & pertal.

3 kr og 5 kr forenes til  $3 + 5$  kr, 3 kr 5 gange forenes til  $3 \cdot 5$  kr, 3% 5 gange til  $103\%^5 - 100\%$ , og

3 kg á 4 kr/kg og 5 kg á 6 kr/kg forenes til  $(3 \cdot 4 + 5 \cdot 6)$  kr, altså arealet under pertals kurven, dvs. integration.

### Hvad er geometri?

Geometri viser, hvordan matematik kan opbygges som en aksiomatisk deduktiv videnskab med smukke beviser. Desuden har geometri mange praktiske anvendelser.

Geometri er et græsk ord, som betyder jordmåling. Jord kan opdeles i trekanter, der igen kan opdeles i retvinklede trekanter, hvor siderne kan angives som procent af hinanden som hhv. sinus, cosinus, tangens og sekant.

### Hvad er matematik?

Matematik er en selvrefererende videnskab bestående af velbeviste udsagn om veldefinerede begreber.

Alt bygger på mængdebegrebet og en mængdeteori, hvor der ikke skelnes mellem mængder og elementer, dvs. mellem eksempler og abstraktioner.

Matematik er en naturvidenskab om det naturlige faktum Mange. For at omgås Mange har vi udviklet to kompetencer, at tælle og at regne. Matematik bliver derved et talsprog, som oversætter tabeller til formler, som forudsiger.

Matematik må ikke forveksles med selvrefererende 'metamatik', som definerer begreber som eksempler på abstraktioner i stedet for som abstraktioner fra eksempler, eller med 'matematisme', som ikke skelner mellem naturlig korrekthed som  $2 \cdot 3 = 6$  og politisk korrekthed som  $2 + 3 = 5$ , et udsagn som falsificeres af fx 2 uger + 3 dage = 17 dage.

### Hvorfor skal man lære matematik C?

Fordi matematik er en del af kulturarven, og fordi matematik træner logisk tænkning, og fordi matematik kan anvendes i mange praktiske situationer. Men matematik skal naturligvis først læres for at kunne anvendes.

For at få kompetence i at bruge formler til tal-forudsigelse i forbindelse med konstant variation, med trekanter, og med statistik, også kaldet variabel, uforudsigelig variation, hvor variabel, forudsigelig variation tages op som calculus på matematik B.

### Er CAS nødvendig på matematik C?

Nej, de unge har så store vanskeligheder med matematik, at det vil være håbløst at introducere CAS, når mange har vanskeligt ved at betjene selv en TI-30.

Ja. Med regression kan CAS ud fra tabeller opstille formler, hvis venstre og højre side indtastes som  $Y_1$  og  $Y_2$ .

CAS kan så grafe funktioner og solve ligninger.

TI-82 eller TI-30X Pro MultiView er billig CAS.