Om anvendelsen af CAS i gymnasiet

Ole Andersen, Risskov Gymnasium

Anvendelsen af CAS er meget omdiskuteret, og fronterne er trukket skarpt op: For og imod. Her vil jeg belyse problemstillingen ud fra en lille model for, hvorledes man arbejder med matematik, som jeg har benævnt *værktøjskassen*. Modellen kan således give et fingerpeg om, hvad der for matematik er væsentligt at satse på fremover.

Værktøjskassen

At løse en ligning er et godt eksempel til at illustrere, hvorledes man arbejder med matematik. Hvad vil det egentligt sige at løse en ligning? Ja, det har man selvfølgelig en formel definition af, og den kan man læse i diverse matematikbøger.

Men når man skal løse en ligning, er det sjældent, at man finder disse formelle definitioner frem og og bruger dem som vejvisere. Nej, der er snarere tale om, at man bringer en masse redskaber i spil for at isolere den ukendte x. Eksempelvis løses ligningen $2x + 3 = 5$ ved først at trække 3 fra på begge sider af ligningen. Dernæst laver man en mellemregning, og til slut deler man med 2 på begge sider af ligningen.

Behersker man ikke disse redskaber, kommer man ikke ret langt, og hvis man slet ikke kommer i gang, siger man, at man ikke kan løse denne ligning i hånden.

Som en anden håndværker med en værktøjskasse. Heri findes redskaber, som kan tages op og bruges ved passende lejligheder. Sådan er det også i matematik. Eleverne opbygger en *værktøjskasse* med en række redskaber, såsom at hæve en plusparentes, hæve en minusparentes etc., som findes frem ved passende lejligheder.

CAS

Lidt det samme er tilfældet, når man skal løse en ligning i CAS. Her skal man også beherske en række *værktøjer*, såsom at indtaste en ligning i sit CAS–værktøj, forstå og konkludere på baggrund af udskriften fra CAS osv. Det er blot helt andre redskaber end dem, man bruger til at løse ligninger i hånden.

Set på den baggrund kommer det at løse en ligning i hånden og i CAS til at fremstå som to vidt forskellige ting, faktisk stort set uden sammenhæng. Når man regner i hånden, træner man nemlig de redskaber, der hører håndregning til, og med CAS træner man derimod de redskaber, der hører CAS til.

Dermed er det lidt lettere at forstå, hvorfor det hele var lidt lettere før indførelsen af CAS. Der trænede man nemlig altid de samme *redskaber*. Med CAS indførte man dermed ikke en lettelse for eleverne, men derimod en hel ny værktøjskasse fyldt med nye værktøjer, som også krævede træning. Og det blev der vel at bemærke ikke afsat ekstra tid til. Tværtimod blev træningen i CAS taget fra den traditionelle matematik. Dermed er CAS noget helt andet end at indføre et nyt emne, thi et nyt emne betyder blot nogle flere ligninger, som skal løses, og dermed mere træning af de basale redskaber, men indførelsen af CAS betyder netop helt nye redskaber. Man har dermed splittet faget op i to dele, som gensidigt modarbejder hinanden.

Men hvorfor så ikke blot træne de to *værktøjskasser* sideløbende? Det er selvfølgelig helt oplagt at gøre dette, men alligevel kommer man ikke uden om det grundlæggende dilemma, at trænes det ene, er det på bekostning af det andet. Før CAS trænede man altid matematik i hånden, og den træning fjernede man med indførelsen af CAS. Denne vedvarende træning skal man absolut ikke undervurdere, fordi man hele tiden udbygger og cementerer sin kunnen med disse *redskaber*. Desuden kan man også glemme sine færdigheder, selvom de fleste nok vil mene, at man selvfølgelig ikke kan glemme at løse en ligning, når man først en gang har lært det håndværk. Ikke desto mindre sagde en kollega til mig her for nylig: *"Ja, er det ikke utroligt. I disse tider, hvor vi bruger CAS så meget. Den anden dag skulle jeg lige løse en ligning i hånden, og det var lige før, at jeg havde glemt hvordan."* Man skal altså heller ikke underkende betydningen af en vedvarende træning.

Nu kunne man selvfølgelig spørge: *"Er det da for pokker ikke ligegyldigt, om man kan løse disse ligninger? Hvorfor ikke overlade alle disse teknikaliteter til maskinerne, så der bliver mere tid til at tale matematik?"* Det er selvfølgelig en mulighed. Desuden er der sikkert ikke mange elever, der direkte får brug for at løse ligninger i deres videre færd. Men så simpelt er det selvfølgelig ikke.

Der er en anden høj pris ved helt at droppe håndregningen, og det er at eleverne mister forståelsen for selv helt simple udtryk. Om sommeren har jeg i de senere år opgraderet fra fysik B til A for kursister, hvoraf de fleste i forvejen har matematik A, alle har fysik B og har en stor interesse for naturvidenskab. Hvis man hjælper dem lidt på vej, kan de godt udføre simple regneoperationer som fx brøkregning, men efter et helt kursusforløb har de stadig svært ved fx i et udtryk som $2\frac{v_0^2}{g}$ lige at sætte 2 op i tælleren eller at sætte uden for parentes i et udtryk som $a \cdot b + b$. De kan godt, når man siger, at man kan, men de har svært ved selv at se det.

Forklaringen er selvfølgelig, at vore elever opbygger skabeloner for at se bestemte ting. Dermed er vi igen tilbage ved værktøjskassen, men her omhandler det ikke en handling, som skal udføres, men tværtimod at se. Vore elever ser ikke det samme, som vi, der har undervist i matematik i mange år, thi vi har nemlig skabt en masse skabeloner for det, vi ser. Det har eleverne ikke, og dermed ser de ikke det samme, som vi.

Det er klart, at disse skabeloner ikke er medfødte, men tværtimod noget, der skal indøves. Og det er på dette punkt, at der optræder en afgørende forskel på, om man regner i hånden eller bruger CAS. Faktisk en ret banal forskel. Løser man fx en ligning i hånden, skal man skrive de tegn, der indgår, flere gange, hvilket alt andet lige selvfølgelig giver mere træning med de skabeloner, der indgår. Desuden skal man på en mere afgørende måde forholde sig til de tegn, der indgår. Eksempelvis er fremgangsmåden imellem at løse ligningerne $x \cdot 2 = 4$ eller $x^2 = 4$ i hånden meget forskellig. Løses de to ligninger derimod med CAS, er der lige en lille detalje med 2–tallet, men ellers er der ingen forskel.

Nogen vil sikkert på nuværende tidspunkt spørge: *"Kan det da ikke være lige meget?"* Jo, men kan man ikke skelne mellem udtryk, som fx $y = 2x$, $y = x + 2$ og $y = x^2$, så er der ikke meget matematik tilbage. Desuden ender man i en uendelig regres. Siger man ikke fra på et tidspunkt, ender man med elever, som ikke kan kende forskel på selv helt simple udtryk som fx $2 + 3$, $2 \cdot 3$ og 2^3.

Sammenhæng

Nu kunne man oplagt spørge, om mennesket virkelig er så fragmenteret, som ovenstående tankegang med værktøjskassen lægger op til. Er det nok blot at lære en masse *redskaber*? Det er det selvfølgelig ikke. Der mangler simpelthen sammenhæng , dvs. sammenhæng imellem de enkelte *redskaber*.

Ligningsløsning er et godt eksempel. Sammenhæng får man netop af de formuleringer, som man finder i diverse lærebøger i matematik, som fx, at vi skal finde de værdier af x, der gør ligningen til et sandt udsagn. Eller en mere konkret udgave: Vi skal have x til at stå alene. Den formulering holder mange elever af, sikkert fordi den siger, hvad man konkret skal gøre. Dermed giver den en sammenhæng imellem mange af de mere konkrete redskaber, som man kan benytte til at omskrive en ligning.

En anden formulering, som jeg holder meget af, er vægten, fordi den giver en ide om, hvilke redskaber, man kan benytte, og hvilke, man ikke kan benytte, når der skal løses en ligning. Denne formulering, eller metafor, som det rettelig er, er fantastisk effektiv.

I det hele taget er der noget med metaforer. De kan sige en masse uden at gøre det hele særlig kompliceret. En god metafor er fantastisk til at formidle en masse viden. Men hvorfor egentligt det? Hvorfor ikke blot sige det med almindelige ord? Er det ikke blot at gøre det unødigt kompliceret at bruge en metafor? Måske er forklaringen den simple, at med en metafor formidler man en masse abstrakt viden, som giver sammenhæng, men det forklares på en konkret måde. Taler man abstrakt, bliver det af gode grunde med et abstrakt sprog, og det går let hen over hovedet på vore elever. Man lærer konkret.

CAS – igen

Det er netop styrken ved CAS. Det er så konkret – tryk der og der, og løsningen står der. Men der er også problemer, fordi man derved let forbigår det generelle, dvs. den matematik som binder det hele sammen. Desuden er CAS–programmer ofte struktureret på en anden måde end matematikken, hvilket også virker hindrende for at forstå den overordnede sammenhæng.

Isbjerget

Mange synes sikkert, at de sidste to afsnit er lidt underlige pga. alt den snak om metaforer, at lære konkret og overordnede strukturer, måske fordi man med disse begreber tillægger bevidsheden en langt mindre rolle, end man ellers gør i daglig tale. I hvert fald er de i denne artikkel omtalte mekanismer ikke bevidste processer, men tværtimod noget, der foregår *bag vores ryg*. Eksempelvis er det ikke et bevidst valg, når man vælger *redskab* til at løse en ligning, men selvfølgelig kan man godt efterrationalisere. Det hører man ofte hos elever, når de ikke lige kan se, hvad de skal gøre, og man giver dem et lille hint. Således ledt på vej siger de med en undskyldende bemærkning: *"Nåe ja, selvfølgelig. Det kan jeg da godt se"*.

Man kan drage parallellen til et isbjerg, der flyder i vand, hvor ca. 10% af isbjerget befinder sig over vandet og resten under vandet. På samme måde er det med mennesket. Her fylder de bevidste handlinger ganske lidt i forhold til de ubevidste. Vi mener godt nok selv, at vi handler bevidst, men det er i de fleste tilfælde en illusion og dækker over, at vi er rigtigt gode til at efterrationalisere.

At det ubevidste fylder så meget er væsentligt at gøre sig klart i forbindelse med undervisning. Man går i hvert fald let galt i byen, hvis man baserer sin undervisning på, at eleverne agerer fornuftigt og bevidst. Derfor al denne snak om værktøjskasser, metaforer, strukturer og at man lærer konkret.

What to do?

Men hvad skal man gøre ved det? Skal man afskaffe CAS, eller skal man omvendt udelukkende undervise i CAS og glemme alt om at omskrive ligninger?

Selv hælder jeg mest til følgende:

- Selvfølgelig skal CAS benyttes. Det kan afhjælpe mange besværlige beregninger og graftegninger.

- Man når langt med fremgangsmåden: *Først i hånden, siden i CAS*. Dermed får man nemlig indøvet diverse *redskaber*, *skabeloner* og den overordnede tankegang, inden man starter den store regnemaskine. Det er den utalte side af matematikken, som man her træner, og den skal man absolut ikke undervurdere. Eksempelvis er det forbavsende så meget matematiksvage elever lærer af at tage noter i forbindelse med tavleundervisning.
- For matematiksvage elever kan det være en aha–oplevelse at anvende CAS, fordi man pludselig bliver i stand til at løse opgaver, som man ikke tidligere kunne løse i hånden.
- Det er utilfredsstillende for mange matematikstærke elever at anvende for meget CAS. De er godt klar over, at

matematikken reduceres til et spørgsmål om at trykke på de rette knapper, og det er selvfølgelig utilfredsstillende. Matematik er altså noget andet, end at kunne gå ind på DSBs hjemmeside og bestille en togbillet fra Aarhus til Odense.

- Man forledes som underviser meget let til det, man kalder *"skabelon–matematik"*, dvs. man laver skabeloner, som passer til diverse typeopgaver, hvor man blot skal ændre nogle tal. En sådan matematik synes eleverne ikke er sjov, men det hjælper dem selvfølgelig til at overleve den skriftlige eksamen.
- Som det næsten fremgår ovenfor, så har eleverne en helt anden opfattelse af brugen af CAS end vi, der arbejder professionelt med matematik, fordi vi simpelthen har et langt større erfaringsgrundlag at læne os op ad. Derfor kan de gode elever sagtens overtales til at gøre en ekstra indsats for at træne håndregningens mysterier. Man kan fx opfordre dem til en gang imellem at lave en af opgaverne med hjælpemidler i hånden. Bare det at overveje, hvilke opgaver der kan løses i hånden, og hvilke, der ikke kan, er en god træning.
- Halvdelen af at regne en opgave er at have en ide om, hvordan man stiller den op. Fordelen ved at lave besvarelsen i hånden er, at man her udelukkende tænker på matematikken, og man behøver ikke tage hensyn til sit CAS–værktøj. Det optimale er derfor at opstille opgaverne i hånden. Kommer man til besværlige udregninger, kan CAS inddrages ved at henvise til et bilag. Derved får man en skarp adskillelse mellem metoden og konkrete regneoperationer.

Til ovenstående har jeg et par kommentarer. Først og fremmest er det måske uheldigt at satse så meget på det håndskrevne. I hvert fald barsler ministeriet med, at de skriflige opgave til eksamen skal afleveres elektronisk. Så med ovenstående tilgang er man oppe imod ministeriet og deres fremtidsplaner.

Mine elever vil helst lave alle opgaver med hjælpemidler i CAS: *"Når man alligevel laver udregningerne i CAS, så kan man lige så godt også lave kommentarerne i CAS."* Men det udelukker selvfølgelig ikke, at det ville være en fordel at lave det i hånden for de matematiksvage elever.

Det er ikke alle undervisere i matematik, der synes ovenstående løsning er en god ide. Løsningen indebærer, at man forsøger at gå på begge ben, dvs. både lærer matematik og bruge CAS. Mange undervisere har i dag valgt CAS–siden og satser primært på de 3–4 timer med CAS til den skriftlige eksamen. Til den mundtlige eksamen må det så gå sin skæve gang. Men vi er nok i starten af en glidebane, hvor brugen af CAS til den mundtlige eksamen stille og roligt vinder frem. Så med ovenstående tilgang er man oppe imod en del udøvende undervisere i den danske gymnasieskole.

En simpel måde at fremme håndregning på er at udvide den skriftlige eksamen uden hjælpemidler fx fra 1 til 3 timer.

Man kunne også ændre karakteren af opgaverne. I dag er opgaverne meget typeopgaver, dvs. man næsten ikke kan lade være med at undervise i skabelonmatematik.

Uden hjælpemidler kunne man også have flere regulære ligninger og udtryk, som skal løses eller reduceres. I dag er der så få, så i hvert fald mine elever bliver helt overraskede, når der i et eksamenssæt optræder sådanne opgaver.

Der er sikkert mange andre muligheder, end de ovenfor skitserede. Her har jeg blot efter bedste evne forsøgt at præsentere en teoretisk ramme, som jeg finder egnet til at analysere problemstillingen med anvendelsen af CAS. Kort og godt skal man altså undgå, at CAS styrer undervisningen. CAS skal kun være et supplement. I hvert fald er det særdeles uheldigt, hvis CAS får lov at splitte faget og dermed dets udøvere. Selvfølgelig er der ingen fikse løsninger på dette dilemma, men man når også langt ved at dreje på de håndtag, som man har til rådighed.

Teoretisk efterskrift

Ideen med værktøjskassen har jeg fra den sene Wittgenstein, som benytter metaforen til at illustrere, at ord bruges på forskellig måde på samme måde som værktøjet i en værktøjskasse også bruges forskelligt. Se *"Filosofiske undersøgelser"* §11. Nu er den her præsenterede læringsteori ikke en sprogteori, men også en teori om, hvorledes man handler. Her illustrerer værktøjskassen på en udmærket måde, at der findes nogle mønstre i vor handlinger, som vi bruger igen og igen nøjagtigt, som man også bruger værktøjer i en værktøjskasse igen og igen. Sådanne mønstre bruges selvfølgelig også i forskellige sammenhænge, nøjagtigt som Witgenstein påviste, at ord også benyttes i forskellige sammenhænge.

Dermed har jeg antydet, at tankegangen i *værktøjskassen* har langt videre perspektiver, end vi her har været omkring. Faktisk så opfatter jeg *værktøjskassen* som en pixiudgave af den læringsteori, som præsenteres på hjemmesiden med adressen web.skolekom.emu.dk/~ole.andersen@skolekom.dk/.