

# Matematikfaget i en verden af muligheder

BODIL BRUUN, fagkonsulent i matematik

Jeg vil gerne sige tak til Ib Michelsen for at lægge op til debat om matematikfagets status og fremtid i det danske gymnasium. Det er en vigtig del af fagets udvikling, at engagerede fagfolk observerer og forholder sig kritisk til de muligheder og begrænsninger, der viser sig i praksis og i overgangen fra et uddannelsesniveau til det næste, og at de beskriver dem for andre. På den måde holdes faget opdateret i et samfund, hvor der er konstante krav om omstillingsparathed i enhver branche.

Der er jo rigtig mange spørgsmål, hvor en del af dem hænger sammen, og de er i nogle tilfælde udtryk for et bestemt matematiksyn. I stedet for at besvare dem ét for ét vil jeg benytte lejligheden til at beskrive mit syn på matematikundervisningen i gymnasiet nu og i fremtiden. Matematikundervisningen i gymnasiet er generelt en succes, der bærer på enkelte problemer, og ikke omvendt et felt med generelle problemer og enkelte succeser – det gælder både hf og stx. Jeg opfatter Ibs debatoplæg, som hørende til i stx, og derfor koncentrerer jeg mit indlæg om stx i denne omgang.

## Matematiks forskellige profiler i gymnasiet

Et af formålene med reformen var at få matematik placeret som et alment dannende, bærende fag i en moderne skole på linje med fagene dansk og engelsk – og det lykkedes. Alle elever i stx og hf har matematik på mindst C-niveau. Det har så vist sig, at langt de fleste elever ender med matematik på B-niveau pga. bindinger i studieretninger med andre fag, og derudover vælger en stor andel af C-niveau eleverne at opgradere, fordi aftagerinstitutionerne stiller krav om B-niveau i mange uddannelser.

Netop matematik B bærer på en særlig udfordring. Hvor der på matematik C er fokus på alment dannende aspekter, er der på matematik B fokus på det anvendelsesorienterede aspekt, og videre på matematik A kommer det teoretiske aspekt i fokus. Men på matematik B

har vi også elever, der vælger at opgradere til matematik A, og det stiller derfor store krav til den enkelte lærer om at tilrettelægge læringsaktiviteter, der kan udfordre disse to typer af elevgrupper på et passende niveau.

## Didaktiske overvejelser er en nødvendighed

Når kompleksiteten i en given undervisningssituation stiger, så følger kravene til didaktiske overvejelser med. Undervisningsdifferentiering er ikke et nyt begreb – heller ikke i matematikundervisningen i gymnasiet<sup>1)</sup> – og det er helt nødvendigt, hvis vi skal kunne motivere den brede skare af elever i gymnasiet i dag og sørge for, at de elever, der vil opgradere, opnår de nødvendige kompetencer til at kunne klare sig på niveauet over.

Det stiller større krav til os som matematiklærere. Lærebogen er blot en fortolkning af læreplanen og vejledningen, og man kan derfor ikke blot slavisk gennemgå stoffet deri. Der skal tænkes i temaopgaver og projekter, herunder progression og taksonomi<sup>2)</sup>, hvor eleverne under tæt lærervejledning individuelt eller i grupper arbejder med stoffet, hvorigennem deres motivation øges, og deres muligheder for at få matematikken ind under huden styrkes. Den slags kan man jo hente inspiration til mange steder, fx på EMU'en og andre steder på internettet, hvor gode fagkolleger stiller deres materialer gratis til rådighed for andre, ligesom bogforlag i perioder ofte tilbyder gratis adgang til i- og e-bøger.

Netop i sådanne undervisningsforløb har man som lærer rigtig gode muligheder for at tilpasse stoffet til forskellige niveauer og elevtyper. De, der kan og savner udfordringer, kan jo passende arbejde med et emne på et højere abstraktionsniveau, som kan forberede dem til fx det overliggende niveau. Forløbsproduktet (fx en rapport) danner i alle tilfælde grundlag for elevens mundtlige eksamen i det pågældende emne.

Eleverne skal kende matematikkens deduktive sider, men de skal også arbejde induktivt og eksperimentelt<sup>3)</sup> i bestræbelserne på at opnå indsigt og forståelse. Undervisningen skal sekvenseres og eleverne skal arbejde både med og uden it, og der skal i begge situationer være fokus på både færdigheder og kompetencer. Kompetencebegrebet er grundigt beskrevet i KOM-rapporten<sup>4)</sup>, mens færdighedsbegrebet er behandlet i færdighedsrapporten<sup>5)</sup>.

I færdighedsrapporten er der indledningsvist beskrevet, hvordan der med indføring af diverse hjælpemidler historisk set er sket en forskydning i opfattelsen af, hvad en matematisk færdighed er. Med den lette adgang til CAS-værktøjer og dynamiske geometri- og statistikprogrammer følger der naturligt også en forskydning i, hvad en matematisk færdighed betragtes som lige nu.

Gruppens svar er, at en matematisk færdighed skal betragtes som en dynamisk størrelse, der skal vedligeholdes, hvis den skal bevares, dvs. den skal bringes i spil i nye situationer og ekspliciteres for eleven, så eleven har mulighed for at opdatere sine ”begrebsbilleder” (concept image)<sup>6)</sup>, som undervejs i undervisningen er ufuldstændige og måske består af flere disjunkte, ufuldstændige begrebsbilleder, som skal kobles, før det samlede begrebsbillede træder tydeligt frem for eleven. Disse brudstykker af begrebsbilleder aktiveres i forskellige situationer, og når eleven i en bestemt situation pludselig forstår en sammenhæng, er det udtryk for, at begrebsbilledet er komplet, og først på det tidspunkt er der tale om en egentlig færdighed.

Det er naturligvis ikke alle elevens begrebsbilleder, der kompletteres i gymnasiet, fordi mulighederne for gentagelse i nye situationer indskrænkes hen mod slutningen af forløbet, og derfor er det heller ikke alle elevens begrebsbilleder, der er komplette, når de begynder i gymnasiet.

Det betyder, at vi i en aktuell undervisningssituation skal være mere bevidste om at udpege og eksplicit nævne de færdigheder, eleven forventes at trække på, så han/hun i højere grad får øje på den gentagne anvendelse af bestemte færdigheder, som matematikundervisningen jo er fuld af.

Det betyder ikke, at vi hovedløst skal terpe brøkreger og algebraisk symbolmanipulationer – det giver isoleret set ikke mening for størstedelen af vores elever. Men som færdighedsrapporten påpeger, så er det en fælles opgave i hele uddannelsessystemet at arbejde med symbolbehandling og algebra, og det bør begynde i grundskolen<sup>7)</sup>.

### Matematik og it

Vi befinder os stadig i en gråzone med hensyn til, hvordan it inddrages i undervisningen. Der er store forskelle fra skole til skole på, hvornår og hvordan man implementerer it i matematikundervisningen – og det gør en stor forskel. Ikke kun på hvordan eleverne klarer den skriftlige eksamen, men også på hvordan de lærer matematik. Der har i de sidste 20 år i Europa og andre steder været gennemført mange undersøgelser af, hvordan anvendelse af it i matematikundervisningen påvirker elevernes læring, og hvilken indflydelse det har på fx elevernes matematiske paratviden og matematiske færdigheder.

Det generelle billede er, at de klasser, hvor it udelukkende anvendes i problemløsning (som en avanceret lommeregner), mister noget med henblik på paratviden og færdigheder, mens de klasser, hvor læreren har tilrettelagt sin undervisning med it som et naturligt læringsredskab – i både teoretisk begrebsindlæring og problemløsning, opnår paratviden og færdigheder på et niveau, svarende til klasser, hvor der ikke anvendes it. Dvs. disse klasser opnår reelle ekstra kompetencer og færdigheder både i forhold til klasser, der arbejder ensopret med it som problemknuser, og klasser, der slet ikke anvender it.

### Digitalisering af skriftlig eksamen

Evalueringerne af den skriftlige eksamen på stx og hf viser et tydeligt billede af, at elever med computer klarer sig bedre end elever med et håndholdt CAS-værktøj. Andelen af computerbrugere er desuden støt stigende, så vi nærmer os et mere ensartet værktøjsgrundlag for besvarelse af eksamensopgaver. I løbet af de kommende år vil håndteringen af den skriftlige eksamen blive digitaliseret, dvs. elever skal have en computer for at kunne hente opgavesættet og aflevere deres besvarelse, ligesom distribueringen af elevbesvarelser til censor vil foregå digitalt.

### Matematik A

I forbindelse med denne digitalisering vil det være naturligt, at forsøg med digitale eksamensopgaver<sup>8)</sup> på matematik A implementeres. De første elever i netforsøget var til eksamen i 2010, hvor eksamen bestod af en 2 timers prøve med formelsamling efterfulgt af en 3 timers prøve med alle hjælpemidler. Evalueringerne herfra var positive både med hensyn til form og indhold.

Året efter blev der på baggrund af en international evaluering indført et forbedringsmateriale (teori i forlængelse af kernestoffet, hvortil der er knyttet 6 timers vejledning i klassen med egen lærer), som danner grundlag for elevens besvarelse af 3–5 spørgsmål i delprøve 2. Også dette tiltag har afstedkommet positive evalueringer. Mange påpeger den store værdi, disse forberedelsesmaterialer<sup>9)</sup> har for den daglige undervisning og arbejdet med det supplerende stof.

Med denne eksamensform lægges der vægt på, at eleverne har opnået reelle matematiske færdigheder og kompetencer, der sætter dem i stand til at gennemføre matematiske ræsonnementer uden brug af it (delprøve 1), anvende it til problemløsning samt sætte sig ind i et ukendt matematisk stofområde på en sådan måde, at de kan løse opgaver i relation hertil (delprøve 2).

Der har været lange diskussioner om snyd, og et af de modtræk, vi har, er, at elevens besvarelse af de to delprøver vægtes ens. Observerer censorerne stor diskrepans mellem elevens præstation i delprøve 1 og 2, så påpeges dette over for skolen, som forholder eleven dette. Uanset hvad, så vil denne eksamensform bibringe udvikling af faget hen imod det, som er hovedformålet med moderne matematikundervisning i gymnasiet, nemlig at anvendelse af it styrker udviklingen af elevens matematiske kompetencer, og ikke blot får særligt it-kompetente lærere og elever til at udvikle smarte skabeloner, der spærrer for elevens mulighed for at opnå reelle matematiske kompetencer!

### Matematik B

De sidste års skriftlige eksaminer i matematik B har vist, at hvis opgavesættet har den rette beskaffenhed, så har de svage elever, der følger med og trods alt gør deres bedste, mulighed for at bestå. Det betyder jo, at de rent faktisk har lært noget, fordi opgaverne stilles jo inden for alle emner i kernestoffet, og når Ib skriver, at dygtige folkeskoleelever kan løse studentereksamensopgaverne, så er det helt ude af proportioner. Man kan diskutere, om den skriftlige eksamen består af de rigtige elementer set i forhold til de elever, der rent faktisk har matematik B<sup>10)</sup> – og altså ikke matematik A.

Mange elever på matematik B trives måske bedre med projekter end med standardopgaver, som ikke giver mening for dem og derfor heller ikke udvikler deres begrebsbilleder tilstrækkeligt. Projekter, der giver mening fx i forhold til elevernes studieretning eller projekter, der har et anvendelsesorienteret aspekt, virker i højere grad motiverende for eleven, fordi de oplever, at de selv er med til at skabe den faglige progression.

I udredningsarbejdet omkring kønnes tilgang til matematik i gymnasiet<sup>11)</sup> fandt man, at drengene klarer sig ringere end pigerne både mundtligt og skriftligt på matematik B. Som rapporten viser, kan der være mange grunde til det-

te. Men blandt anbefalingerne er, at der arbejdes med større variation i arbejdsformerne, hvilket projektarbejdet kunne være en del af.

Måske er der også behov for at gentænke den skriftlige eksamen på matematik B, så netop projektarbejdet og det anvendelsesorienterede aspekt trækkes tydeligere frem. Man kunne forestille sig en tredelt eksamensform som den ovenfor beskrevne for matematik A, hvor tidsforbruget på de to delprøver er som nu, og forberedelsesmaterialet har karakter af et større anvendelsesorienteret projekt, som eleverne arbejder med i fx 4 timer med lærervejledning, og som danner grundlag for besvarelse af 3–5 spørgsmål i delprøve 2. Dette kunne fremme arbejdet med modellering, problemløsning og strategiovervejelser i tilknytning hertil, som mange aftagere efterspørger.

Aftagerne sætter stor pris på, at eleverne besidder evnen til at gå til en ukendt opgave med gåpåmod og overvejelser om forskellige løsningsstrategiers kvaliteter, og at de ikke kun besidder instrumentelle færdigheder til løsning af standardopgaver.

### Mundtlig eksamen

I disse år oplever vi en stigning i antal elever, der dukker op til eksamen med et bevis for en sætning, som måske ikke er gennemgået i klassen. I første omgang bliver vi måske lidt stødt på manchetterne, men eleven har jo fundet frem til netop den undervisningsform, som fungerer for hende/ham – måske bare fordi hun/han kan se den om og om igen, fordi det er en video hentet fra et af de mange steder, hvor lærere arbejder med at formidle matematik for elever og studerende på forskellige niveauer i uddannelsessystemet.

Når eleven går hjem og lærer sætninger og beviser udenad, så er det jo fordi eleven mener, at det er kravet til den mundtlige eksamen. Men vi er jo ikke kun interesseret i, om eleven kan lære udenad – det er en færdighed, vi også gerne ser,

men vi lægger jo mere vægt på, at eleven kan indgå i en faglig dialog.

Eksamen er todelt, så eleven skal demonstrere sin evne til netop at indgå i en faglig dialog om uforberedt stof inden for eksamensspørgsmålets overskrift. I den dialog bliver det hurtigt klart for lærer og censor, hvorvidt eleven i den første del blot har memoreret sit indlæg, eller om elevens begrebsbilleder er så komplette og hendes/hans kompetencer så veludviklede, at hun/han kan bringe disse i spil i de rigtige situationer i dialogen.

At eleverne kender spørgsmålenes udformning har været med til at afdramatisere de mundtlige eksaminer, og hvis man i undervisningen prioriterer, at eleverne skal kommunikere i, om og med matematik, som er en af KOM-rapportens otte kompetencer, så kan de også på et for dem passende fagligt niveau indgå i den faglige dialog – både under første og anden del af eksaminationen. Ibs spørgsmål vedrørende mundtlig eksamen kunne tyde på, at der er lokale forskelle med hensyn til, hvordan reformens intentioner implementeres, og det er således ikke reformen, der fejler, men implementering af den. En måde, hvorpå vi sammen kan sørge for at den mundtlige eksamen lever op til læreplanens krav, er jo, at vi i kommunikationen mellem lærer og censor forud for eksamen tydeligt afstemmer krav og forventning, som måske ikke direkte fremgår af eksamensspørgsmålene.

Som afslutning på mit indlæg vil jeg blot påpege, at hvis undervisningen bygges op, så den giver mening for eleverne, så er hverken de eller vi i tvivl om, hvorfor de skal lære matematik, uanset hvilket niveau vi taler om.

### Noter

<sup>1)</sup>Matematiklærerforeningen har udgivet et hæfte om emnet med supplerende materialer: [uvmat.dk/uvdiff/index.htm](http://uvmat.dk/uvdiff/index.htm). Allerede i 1995 udgav undervisningsministeriet rent faktisk et lille hæfte om samme emne.

<sup>2)</sup>Matematiklærerforeningen har udgivet en bog om *Anvendelse af computer i matema-*

*tikundervisning*, hvori det bl.a. er beskrevet, hvordan SOLO-taksonomien kan anvendes i både planlægning og evaluering. Supplerende materialer til hæftet findes på [uvmat.dk/mathit/index.htm](http://uvmat.dk/mathit/index.htm).

<sup>3)</sup>Matematiklærerforeningen har udgivet en bog om eksperimenter i matematikundervisningen med og uden it: *XM – Eksperimentel Matematik* er et udviklingsprojekt i Matematiklærerforeningen, [uvmat.dk/xm/index.htm](http://uvmat.dk/xm/index.htm).

<sup>4)</sup>*Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, Mogens Niss m.fl.: [pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf](http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf).

<sup>5)</sup>*Moderne matematiske færdigheder fra skolestart til studiestart – Et udredningsarbejde finansieret af Undervisningsministeriet 2010–11*, H. C. Thomsen m.fl.: [fou.emu.dk/offentlig\\_show\\_projekt.do?id=162957](http://fou.emu.dk/offentlig_show_projekt.do?id=162957).

<sup>6)</sup>Begrebet stammer fra D. Tall og S. Vinnars artikel *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*, *Educational Studies in Mathematics*, nr. 12, 1981.

<sup>7)</sup>I rapporten nævnes, at dette begrundes og understøttes af en international didaktisk forskning, der kan samles under navnet “early algebra”, med reference til C. Kierans artikel *Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels*, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2007.

<sup>8)</sup>Eleverne har adgang til internettet under den skriftlige eksamen, derfor kaldes forsøget som oftest blot ”netforsøget”.

<sup>9)</sup>Forsøgets læreplan, formelsamling og vejledende opgavesæt findes her: [uvm.dk/Uddannelser/Gymnasiale-uddannelser/Studieretninger-og-fag/Forsøgsfag-i-de-gymnasiale-uddannelser/Digital-eksamen-i-matematik-A](http://uvm.dk/Uddannelser/Gymnasiale-uddannelser/Studieretninger-og-fag/Forsøgsfag-i-de-gymnasiale-uddannelser/Digital-eksamen-i-matematik-A), og de stillede opgaver findes her: [uvm.dk/Uddannelser/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Skriftlige-opgavesaet/Opgavesaet-for-stx](http://uvm.dk/Uddannelser/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Skriftlige-opgavesaet/Opgavesaet-for-stx).

<sup>10)</sup>Matematik B bundet i studieretningen eller ved opgradering, dvs. som et egentligt valgfag. Derudover kan eleverne i dag vælge at opgradere matematik fra C– til B–niveau i stedet for som tidligere at opgradere et naturvidenskabeligt fag til B–niveau.

<sup>11)</sup>*Gymnasiets drenge – matematikfagets drenge*, Rapport fra et FoU-projekt – 126152 af Crilles Bacher–Jensen m. fl., Institut for Naturfagernes Didaktik, Københavns Universitet, 2011: [fou.emu.dk/offentlig\\_show\\_projekt.do?id=156356](http://fou.emu.dk/offentlig_show_projekt.do?id=156356).