En optimeringsopgave, 2

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Arif Zolić, Beograd

Vi så i LMFK–bladet 2 (marts 2013) på en af de gængse optimeringsopgaver. Vi skal her se på en tilsvarende og fremlægge flere mulige løsningsmetoder. Det er altid intereressant at se en opgave løst ad mange veje.

Opgave. Bestem længde og bredde i et rektangulært grundstykke med et givet areal k således, at omkredsen er så lille som mulig.

Hvis længden af en af siderne er x, er den anden sidelængde $\frac{k}{x}$, så omkredsen bliver

$$O(x) = 2\left(x + \frac{k}{x}\right).$$

Det er denne funktions minimumssted (for $x > 0$), vi skal bestemme.

Løsning 1. Differentiation giver

$$O'(x) = 2\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)$$

og for $x > 0$ er $O'(x) = 0$ for $x = \sqrt{k}$. Almindelig fortegnsundersøgelse af $O'(x)$ afslører, at dette er et minimumssted. Længden af den anden side i rektanglet er $\frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$, så grundstykket bliver kvadratisk.

Løsning 2. Vi kan skrive sådan:

$$O(x) = 2\left(x + \frac{k}{x}\right) = 2\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4\sqrt{k}$$

Funktionens minimumsværdi antages for den x–værdi, der gør parentesen til 0, dvs.

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{k}.$$

Omkredsen er da $4\sqrt{k}$ og da længden er $\sqrt{k}$, er grundstykket kvadratisk.

Løsning 3. Den ene side har længden x, den anden sides længde sætter vi til $p - x$. Så er

$$O(x) = 2x + 2(p - x) = 2p.$$

Arealet er k, så vi får

$$k = x \cdot (p - x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - px + k = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\left(x - \sqrt{k}\right)^2 = \left(2\sqrt{k} - p\right)x. \qquad (1)$$

Altså er

$$2\sqrt{k} - p \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \ge 2\sqrt{k} \quad \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}O(x) \ge 2\sqrt{k} \quad \Leftrightarrow \quad O(x) \ge 4\sqrt{k}$$

Den mindste værdi for $O(x)$ er altså $4\sqrt{k}$, som opnås når $p = 2\sqrt{k}$. Så får vi af (1), at $x = \sqrt{k}$ og $p - x = \sqrt{k}$. Grundstykket er kvadratisk med sidelængde $\sqrt{k}$.

Løsning 4. Hvis sidelængderne i rektanglet er x og y er $x \cdot y = k$. Vi har så, at

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (x - y)^2 + 4k.$$

Omkredsen er $O(x) = 2(x + y)$, så vi skal gøre $x + y$ så lille som mulig. Af formlen ser vi, at $x + y$ er mindst mulig, når $x - y = 0$ dvs. når $x = y$. I så fald er

$$(x + y)^2 = 4k \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 2\sqrt{k}$$

hvoraf $x = y = \sqrt{k}$.

Løsning 5. Lad x og y være sidelængderne i rektanglet, så $x \cdot y = k$. En af sidelængderne er mindst $\sqrt{k}$ (thi $x < \sqrt{k}$ og $y < \sqrt{k}$ ville medføre $x \cdot y < k$). Vi kan antage, at $x \ge \sqrt{k}$ og sætte $x = \sqrt{k} + b$. Så er

$$y = \frac{k}{x} = \frac{k}{\sqrt{k} + b} \ge \frac{k - b^2}{\sqrt{k} + b} = \frac{\left(\sqrt{k} - b\right)\left(\sqrt{k} + b\right)}{\sqrt{k} + b} = \sqrt{k} - b$$

Så er

$$\tfrac{1}{2}O(x) = x + y \ge \sqrt{k} + b + \sqrt{k} - b = 2\sqrt{k}$$

Hvis $x = \sqrt{k}$ og $y = \sqrt{k}$, er $x + y = 2\sqrt{k}$. Disse værdier af x og y giver altså den mindste omkreds.

Løsning 6. Kvadratet med sidelængde $\sqrt{k}$ har arealet k. Vi viser, at hvis vi forlænger den ene sidelængde til $\sqrt{k} + z$ (hvor $z > 0$) og dermed ændrer den anden sidelængde til $\frac{k}{\sqrt{k}+z}$, bliver omkredsen større end $4\sqrt{k}$. Vi får nemlig

$$2\left(\sqrt{k} + z\right) + \frac{2k}{\sqrt{k} + z} > 4\sqrt{k} \quad \Leftrightarrow$$
$$2\left(k + z^2 + 2z\sqrt{k}\right) + 2k > 4\sqrt{k}\left(\sqrt{k} + z\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$2k + 2z^2 + 4z\sqrt{k} + 2k > 4k + 4z\sqrt{k} \quad \Leftrightarrow \quad 2z^2 > 0$$

hvilket er sandt.