# Gevinst på hver 20. række?

Ole Witt-Hansen, pensioneret lektor

I det relativt nye lottospil *EuroJackpot* reklameres der for spillet med løftet: *Gevinst på hver 20. række*. Og hvorfor skulle det ikke passe, når de fleste 3.g–elever på mat/fys–grenen var i stand til at kontrollere påstanden for 25 år siden. Efter at have spillet 4 rækker i 5 uger, uden gevinst, besluttede jeg mig for at efterprøve påstanden.

Da kombinatorik og grundlæggende sandsynlighedsregning ikke længere er en del af gymnasiets matematikpensum, opridser jeg lige de nødvendige forudsætninger.

Hvis man har et udfaldsrum, som er en mængde med $n$ elementer (en $n$–mængde), så er antallet af forskellige måder, man kan udtage en $q$–delmængde givet ved

$$K(n,q) = \frac{n!}{(n-q)!q!}$$

En hændelse $H$ defineres som en delmængde af udfaldsrummet $U$. I et symmetrisk sandsynlighedsfelt, hvor alle udfald i $U$ har samme sandsynlighed, er sandsynligheden for en hændelse $H$ givet ved

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(U)} = \frac{\text{Antal elementer i } H}{\text{Antal elementer i } U} = \frac{\text{Gunstige}}{\text{Mulige}}$$

**EuroJackpot**

En række i *EuroJackpot* består af 5 felter, der udfyldes med tallene 1 ... 50 og to felter, der udfyldes med tallene 1 ... 8.

1. præmie: 5 + 2 rigtige. De 5 tal kan vælges på $K(50,5)$ måder og de 2 tal på $K(8,2)$ måder. Det giver i alt $K(50,5)\cdot K(8,2)$ = 59.325.280 udfald. Sandsynligheden er derfor

$$P(5+2) = \frac{1}{59.325.280} = 1{,}686\cdot 10^{-8}$$

2. præmie: 5 + 1 rigtige. Det rigtige blandt de to, kan vælges på 2 måder. Det andet af de to tal, kan udvælges blandt de 6, som ikke er vindertal.

$$P(5+1) = 2\cdot 6\cdot P(5+2) = 12\cdot P(5+2) = 2{,}022\cdot 10^{-7}$$

3. præmie: 5 rigtige. De to tal kan vælges blandt de 6, som ikke er vindertal på $K(6,2)$ = 15 måder.

$$P(5+0) = 15\cdot P(5+2) = 2{,}528\cdot 10^{-7}$$

4. præmie: 4 + 2 rigtige. De 4 rigtige kan vælges blandt de 5 vindertal på $K(5,4)$ = 5 og det 5'te forkerte tal kan væges på $K(45,1)$ = 45 måder, i alt 5·45 = 225 måder.

$$P(4+2) = 225\cdot P(5+2) = 3{,}793\cdot 10^{-6}$$

Tilsvarende fås:

5. præmie: 4 + 1 rigtige
   Mulige måder: $K(5,4)\cdot K(45,1)\cdot 2\cdot 6$ = 2.700.
   $P(4+1) = 2.700\cdot P(5+2) = 4{,}552\cdot 10^{-5}$

6. præmie: 4 rigtige
   Mulige måder: $K(5,4)\cdot K(45,1)\cdot K(6,2)$ = 3.375.
   $P(4+0) = 3.375\cdot P(5+2) = 5{,}689\cdot 10^{-5}$

7. præmie: 3 + 2 rigtige
   Mulige måder: $K(5,3)\cdot K(45,2)$ = 9.900.
   $P(3+2) = 9.900\cdot P(5+2) = 1{,}688\cdot 10^{-4}$

8. præmie: 3 + 1 rigtige
   Mulige måder: $K(5,3)\cdot K(45,2)\cdot 2\cdot 6$ = 118.800.
   $P(3+1) = 118.800\cdot P(5+2) = 2{,}003\cdot 10^{-3}$

9. præmie: 2 + 2 rigtige
   Mulige måder: $K(5,2)\cdot K(45,3)$ = 141.900.
   $P(2+2) = 141.900\cdot P(5+2) = 2{,}392\cdot 10^{-3}$

10. præmie: 3 rigtige
   Mulige måder: $K(5,3)\cdot K(45,2)\cdot K(6,2)$ = 148.500 måder.
   $P(3+0) = 148.500\cdot P(5+2) = 2{,}503\cdot 10^{-3}$

11. præmie: 1 + 2 rigtige
   Mulige måder: $K(5,1)\cdot K(45,4)$ = 744.975.
   $P(1+2) = 744.975\cdot P(5+2) = 1{,}256\cdot 10^{-2}$

12. præmie: 2 + 1 rigtige
   Mulige måder: $K(5,2)\cdot K(45,3)\cdot 2\cdot 6$ = 1.702.800.
   $P(2+1) = 1.702.800\cdot P(5+2) = 0{,}02871$

Hvis man skal udregne chancen for gevinst, kan man selvfølgelig addere samtlige sandsynligheder, men det er lettere at addere summen af alle elementerne i de disjunkte hændelser, hvilket giver 2.873.203. Ganger man dette med $P(5+2)$ får man $P(\text{gevinst}) = 0{,}04843$.

Da dette er meget tæt på 5%, kan man godt antage, at der i gennemsnit er gevinst på hver 20. række.

Man kan få et skøn over middelgevinsten ved at sætte 1. præmien til 63.000.000 kr. og anvende de præmier, der foreligger ved en trækning. En række koster 15 kr. $G$ står for gevinst.

$E(X) = G(5+2)\cdot P(5+2) + G(5+1)\cdot P(5+1) + \ldots + G(2+1)\cdot P(2+1) = 4{,}20$ kr.

Middelgevinsten er derfor (skøn) 4,20 kr. –15 kr. = –11,80 kr.

**Lotto**

I almindelig lotto udtrækkes 7 tal ud af 36, samt et tillægstal. Der er $K(37,7) = 8.347.680$ muligheder.

1. præmie: 7 rigtige: $P(7) = 1/K(37,7) = 1{,}1979 \cdot 10^{-7}$

2. præmie: 6 rigtige plus tillægstallet
   De 6 rigtige kan vælges blandt 7 på $K(7,6) = 7$ måder.
   $P(6 + 1) = 7 \cdot P(7) = 8{,}385 \cdot 10^{-7}$

3. præmie: 6 rigtige
   De 6 rigtige kan udvælges blandt 7 på $K(7,6)$ måder og det sidste tal kan vælges blandt 36 – 7 – 1 = 28 måder. I alt K(7,6)·28 = 196 måder.
   $P(6) = 196 \cdot P(7) = 2{,}358 \cdot 10^{-5}$

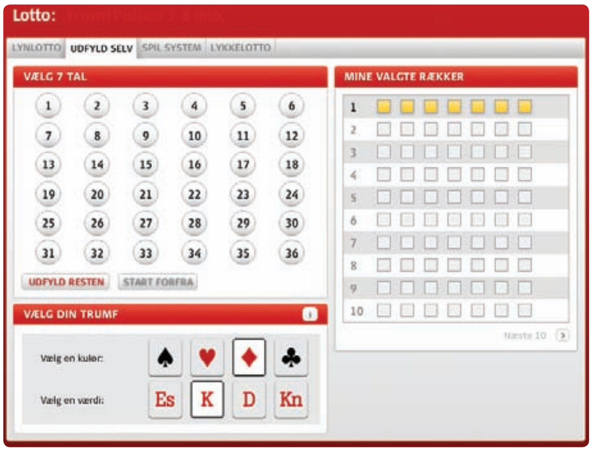
4. præmie: 5 rigtige
   De 5 rigtige kan udvælges på $K(7,5)$ måder, og de to sidste tal kan udvælges blandt 36 – 7 = 29 tal på K(29,2) måder. I alt $K(7,5) \cdot K(29,2) = 8.526$ måder.
   $P(5) = 8.526 \cdot P(7) = 1{,}021 \cdot 10^{-3}$

5. præmie: 4 rigtige
   $K(7,4) \cdot K(29,3) = 127.890$ måder.
   $P(4) = 127.890 \cdot P(7) = 0{,}01532 = 1{,}53$ %

Det samlede antal muligheder for gevinst er 136.620. Dette giver en gevinstchance på $P(\text{gevinst}) = 136.620 \cdot P(7) = 0{,}01637$ = 1,64 %

Umiddelbart ser det ud til, at gevinstmulighederne er større i *EuroJackpot* end i *Lotto*, men én lottorække koster 4 kr. mens en EuroJackpotrække koster 15 kr. og 15/4·1,64 % = 6,15 % > 4,8 %

Et komplet lærebogssystem i matematik incl. sandsynlighedsregning, et hefte om optimale strategier ved spil, samt mange andre undervisningsmaterialer, jeg har lavet til gymnasial undervisning i fysik og matematik kan findes på min hjemmeside olewitthansen.dk.


# Errata

Jeg er blevet opmærksom på en beklagelig fejl i artiklen om opvarmning og afkøling i sidste nummer. I ligningen: $Pdt = c \cdot m \cdot dT - k(T - T_0)dt$ er leddet $-k(T - T_0)dt$ anbragt på den forkerte side af lighedstegnet. Ligningen skulle være. $Pdt - k(T - T_0)dt = c \cdot m \cdot dT$. Ligningen løses i øvrigt på samme måde som i artiklen til at give:

$$T = T_0 + \frac{P}{k}(1 - e^{-\frac{k}{cm}t})$$

Når tilført varme modsvarer afgivet varme er sluttemperaturen: $T_{slut} = T_0 + P/k$. Opvarmningstiden til temperaturen $T$, bliver herefter:

$$t = \frac{c \cdot m}{k} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{k(T - T_0)}{P}}\right)$$

Ole Witt–Hansen