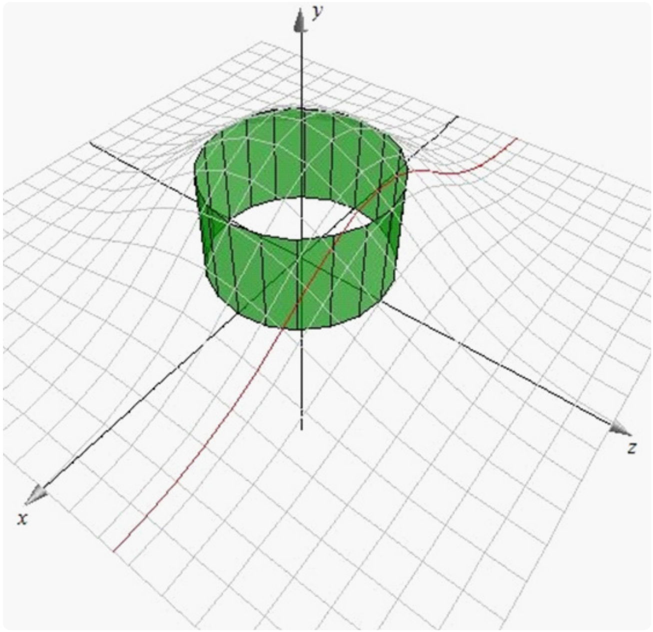
# Poissons integral

## – et geometrisk argument for den eksakte værdi $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Alija Muminagic, Olav Lyndrup

Hvis grafen for funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ roteres omkring $y$–aksen, så fremkommer et omdrejningslegeme, som har et volumen. Dette volumen ønskes bestemt. Overfladen af omdrejningslegemet fremkommer som graf for funktionen $f(x,z) = e^{-x^2-z^2}$.




Det er kun overfladearealet i den positive oktant, der betragtes. Hvis funktionsværdien $f(x,z) = k$, hvor $0 \le k \le 1$ holdes konstant, så får vi følgende sammenhæng mellem $x$ og $z$:

$$e^{-x^2-z^2} = k \Leftrightarrow -x^2 - z^2 = \ln(k) \Leftrightarrow x^2 + z^2 = -\ln(k)$$

Dette betyder, at et tværsnit parallelt med planen $xz$ beskriver en cirkel med centrum (0, 0) og radius $\sqrt{-\ln(k)}$.

Arealfunktionen er dermed $A(k) = \pi \cdot (-\ln(k)) = -\pi \cdot \ln(k)$. Hvis $A(k)$ integreres fra et bestemt tal $h$ til 1, så fås volumenet

$$\frac{1}{4}\int_h^1 A(k)dk = \frac{1}{4}\int_h^1 -\pi \ln(k)dk = -\frac{\pi}{4}\left[k\ln(k) - k\right]_h^1$$
$$= -\frac{\pi}{4}\left(1\ln(1) - 1 - \left(h\ln(h) - h\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(1 + h\ln(h) - h\right)$$

Rumfanget af den kvarte cylinder, der roteres omkring $y$–aksen med radius $\sqrt{-\ln(h)}$ og højden $h$, er

$$\frac{1}{4}h\left(-\ln(h)\pi\right) = -h\ln(h)\frac{\pi}{4}$$

Det samlede rumfang er

$$\frac{\pi}{4}\left(1 + h\ln(h) - h\right) - \frac{\pi}{4}h\ln(h) = \frac{\pi}{4}\left(1 - h\right)$$

Da $h = e^{-(x^2+z^2)} = e^{-R^2}$, hvor $R$ er radius i cirklen, når funktionsværdien er $h$, så kan rumfanget udtrykkes ved $\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right)$. Volumenet $V$ af omdrejningslegemet fås dermed som grænseværdien

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

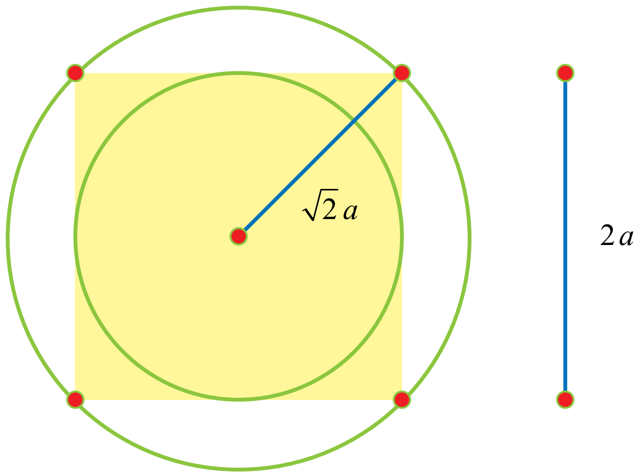
Hvis grafen for samme funktion $f(x,z) = e^{-x^2-z^2}$ skæres med et lodret snit parallelt med $xy$ planen, så kan arealet af dette lodrette snit bestemmes ved

$$A(z) = \int_0^a e^{-x^2-z^2}\,dx = e^{-z^2} \cdot \int_0^a e^{-x^2}\,dx$$

Igen kan volumenet bestemmes ud fra denne arealfunktion, dvs.

$$W = 4\int_0^a e^{-z^2}\,dz \cdot \int_0^a e^{-x^2}\,dx = 4\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

Et vandret snit illustrerer sammenhængen mellem tre volumener




Dette betyder, at $V(a) < W(a) < V\left(\sqrt{2}a\right)$. Denne dobbeltulighed er ækvivalent med

$$\pi\left(1 - e^{-a^2}\right) < 4\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right)$$

hvilket medfører

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right)} < \int_0^a e^{-x^2}\,dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2a^2}\right)}$$

Betragtes grænseværdien $\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}\,dx$, da giver dobbeltuligheden, at

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$