Et anderledes bevis
– for Nipunktscirklens eksistens

Sissee L. N. Jensen 3A, Haslev Gymnasium

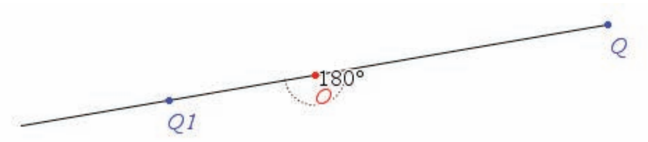
Den såkaldte Nipunktscirkel forener ni kendte punkter i en trekant, i en cirkel. Allerede i 1800–tallet var Nipunktscirklen en kendt matematisk konstruktion, men hvad er det ved Nipunktscirklen, der er interessant for os i dag? Dette kigger vi nærmere på i denne artikel, samt hvordan Nipunktscirklens eksistens kan bevises, når der tages udgangspunkt i multiplikation om et punkt. Endvidere kigger vi nærmere på endnu en geometrisk opdagelse, nemlig Eulerlinjen.

For at vi kan bevise Nipunktscirklens eksistens, er det nødvendigt, at have kendskab til multiplikation med faktor r.

Definition: Når der multipliceres med faktor r om O, forstås en afbildning af punkter i punkter. Et punkt, Q, bliver afbildet over i et nyt punkt, Q_1 på halvlinjen OQ, når det er givet at $r > 0$:

$$|OQ_1| = r \times |OQ|$$

En multiplikation med faktor r, hvor $r < 0$, betyder, at punktet Q multipliceres med faktor $|r|$, punktet drejes derefter 180° om O. En illustration af multiplikation med faktor r < 0 fremgår af figur 1.



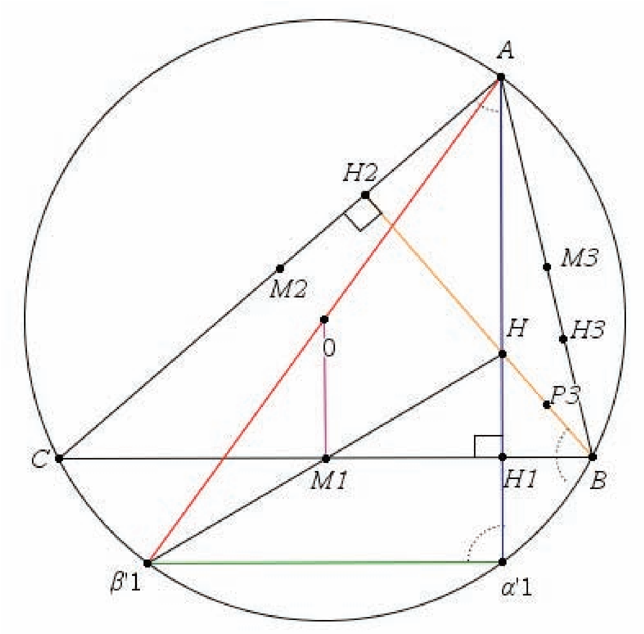
Figur 1

Det skal nævnes, at dele af det følgende bevis tager udgangspunkt i David Fog's bevis for Nipunktscirklen fra det matematiske tidsskrift *"Elementærgeometri II"* fra 1931. Vi kan nu påbegynde beviset af Nipunktscirklens eksistens, med følgende sætning:

Sætning 1: For en vilkårlig trekant ΔABC gælder, at de tre sidemidtpunkter M_1, M_2, M_3, højdefodpunkterne H_1, H_2, H_3, samt midtpunkterne af forbindelseslinjerne mellem højdens skæringspunkter H og vinkelspidserne, ligger på en og samme cirkel, – trekantens Nipunktscirkel.

Vi tager udgangspunkt fra $\angle A$'s højdefodpunkt H_1, siden BC's midtpunkt og forbindelseslinjen HB.

Bevis: Vi starter med at skabe punktet β_1', som er skæringen mellem den omskrevne cirkel, og diameteren ud fra $\angle A$. Derefter skabes punktet α_1', ud fra $\angle A$ som skæringspunktet mellem forlængelsen af højden fra A og den omskrevne cirkel. De omtalte konstruktioner fremgår af figur 2.



Figur 2 – Vilkårlig trekant

Vi ønsker at vise, at nipunktscirklen fås ved at multiplicere den omskrevne cirkel med faktor $\frac{1}{2}$ om H.

For at overskueliggøre beviset, opdeler vi dette i fire skridt:

1. H_1 er midtpunkt på $H\alpha_1'$, α_1' bliver ved multiplikation afbildet over i H_1.
2. M_1 er midtpunkt på $H\beta_1'$, β_1' bliver ved multiplikation afbildet over i M_1.
3. På BC er M_1 midtpunkt
4. Punktet P_3 fås ved multiplikation af forbindelseslinjen B med faktor $\frac{1}{2}$

Vi kan nu bevise første del.

1. Vi kan se, at ΔCBH_2 og ΔACH_1 er ensvinklede, da:

$$\angle CH_2B = 90° \quad \text{og} \quad \angle CH_1A = 90°$$

Desuden har de to trekanter $\angle$C til fælles, og da vinkelsummen i en trekant er 180° må det gælde, at:

$$\angle CBH_2 = \angle CAH_1$$

Da $\angle CAH_1$ og $\angle CB\alpha_1'$ er periferivinkler, der spænder over buen $C\alpha_1'$, må det gælde, at:

$$\angle CAH_1 = \angle CB\alpha_1'$$

Dermed gælder det, at:

$$\angle CBH_2 = \angle CAH_1 = \angle CB\alpha_1'$$

Samt må gælde at BH_1 er vinkelhalveringslinje i $\Delta HB\alpha_1'$, da:

$$\angle HBH_1 = \angle CB\alpha_1'$$

I $\Delta HB\alpha_1'$ er BH_1 højden fra B. Ud fra definition af højdens fodpunkt gælder at:

$$AH_1 \perp BC$$

Da BH_1 opfylder disse krav gælder det, at BH_1 er $H\alpha_1'$'s midtnormal.

Dermed har vi nu, at H_1 er midtpunkt på $H\alpha_1'$:

$$|H_1H| = \frac{1}{2} \times |H\alpha_1'|$$

2. Vi konstruerer linjestykket $\beta_1'\alpha_1'$.
Fordi vinklen er en periferivinkel som spænder over en diameter, konstateres det at:

$$\angle \beta_1'\alpha_1'A = 90°$$

Trekanterne $\Delta H\beta_1'\alpha_1'$ og ΔHM_1H_1 deler vinkel H, og har begge en ret vinkel. Dermed er de to trekanter ensvinklede. Vi benytter nu forstørrelsesfaktoren, således gælder det, at:

$$k = \frac{|H_1H|}{|H\alpha_1'|} = \frac{1}{2} = \frac{|M_1H|}{|H\beta_1'|} \Leftrightarrow |M_1H| = \frac{1}{2} \times |H\beta_1'|$$

3. O er centrum i cirklen, dermed må O være midtpunkt på diameteren $A\beta_1'$. Da dette gælder, samt at M_1 er midtpunkt på $H\beta_1'$, så er $\Delta O\beta_1'M_1$ og $\Delta A\beta_1'H$ ensvinklede, og derfor er

$$OM_1 \parallel A_1H$$

Når disse er parallelle, må det gælde at:

$$OM_1 \perp CB \text{ da } AH \perp CB$$

I ΔOCB er højden OM_1. OC og OB er radier i cirklen:

$$OA_3 = OA_2 = r$$

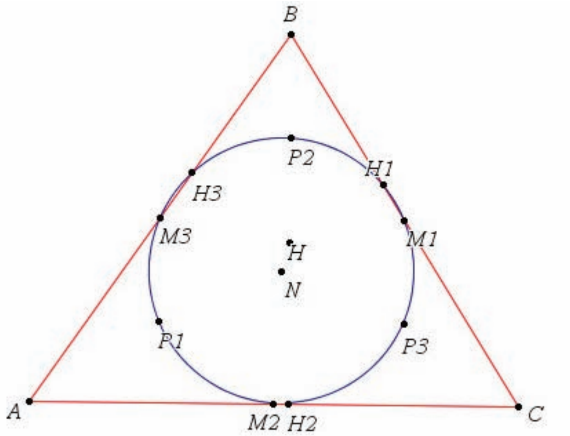
Dermed har ΔOCB to lige store sider, og to lige store vinkler, ΔOCB er derfor ligebenet. Vi ved at der for en ligebenet trekant gælder, at median og højden falder sammen. Dermed har vi nu vist at M_1 er midtpunkt på BC.

4. Vi multiplicerer forbindelseslinjen HB med $\frac{1}{2}$ og vi får nu punktet P_3

$$|HP_3| = \frac{1}{2} * |HB|$$

Ved at multiplicere den omskrevne cirkel med faktor $\frac{1}{2}$ om H, får vi at punkterne på trekantens omskrevne cirkel, bliver ført over i punkterne H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3. Vi multiplicerer også midtpunkterne af forbindelseslinjerne mellem højdernes skæringspunkter H og vinkelspidserne P_1, P_2, P_3 med faktor $\frac{1}{2}$.

Ved at vi har multipliceret med faktor $\frac{1}{2}$ om H, og da cirkler føres over i cirkler ved multiplikation, fremkommer der en ny cirkel, nemlig nipunktscirklen. Den endelige konstruktion af nipunktscirklen fremgår af figur 3.



Figur 3 – En trekants Nipunktscirkel

Vi har nu bevist, at de ni punkter ligger på trekantens nipunktscirkel.

Eulerlinjen

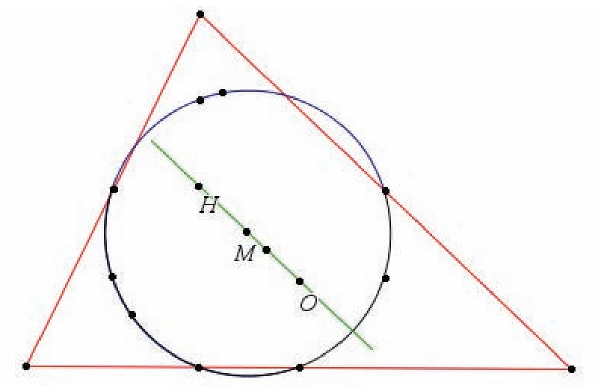
En anden opdagelse inden for geometrien er *Eulerlinjen*. Euler opdagede, at fire kendte punkter i en trekant, der hverken er en del af trekantens sider, den omskrevne cirkel, eller Nipunktscirklen, ligger på samme linje. Vi kan bevise eksistensen af Eulerlinjen.

Vi ved fra beviset tidligere, at Nipunktscirklen fremkommer ved en multiplikation af ni punkter på den omskrevne cirkel. Dermed må det gælde at den omskrevne cirkel fremkommer ved en multiplikation af Nipunktscirklen, dette fremgår også af følgende sætning:

Sætning 2: Ved multiplikation af Nipunktscirklen med faktor –2 om medianernes skæringspunkt, M, fremkommer en trekants omskrevne cirkel.

Når vi ved dette, kan vi bevise eksistensen af Eulerlinjen.

Sætning 3: I en trekant ligger højdernes skæringspunkt H, medianernes skæringspunkt M og midtnormalernes skæringspunkt O på en ret linje, Eulerlinjen.



Figur 4 – Eulerlinjen

Bevis: Når vi multiplicerer O med faktor $\frac{1}{2}$ om H fremkommer N, dermed ved vi, at N ligger på linjen OH, samt:

$$|HN| = \frac{1}{2} \cdot |OH|$$

Ud fra sætning 2 ved vi, at O fremkommer ved multiplikation af N med faktor –2 om M. Dermed må M, N og O ligge på en og samme rette linje.

Da det samtidig gælder, at:

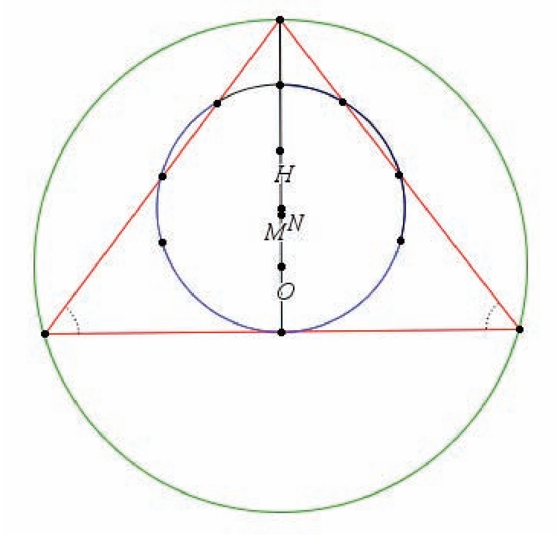
$$|OM| = 2 \cdot |NM|$$

har vi nu bevist, at de fire punkter: H, M, O og N ligger på én ret linje i trekanten, som det fremgår af figur 4.

Eulerlinjens placering

Placeringen af Eulerlinjen i en trekant er ikke tilfældig, det afhænger af forholdet mellem siderne i trekanten.

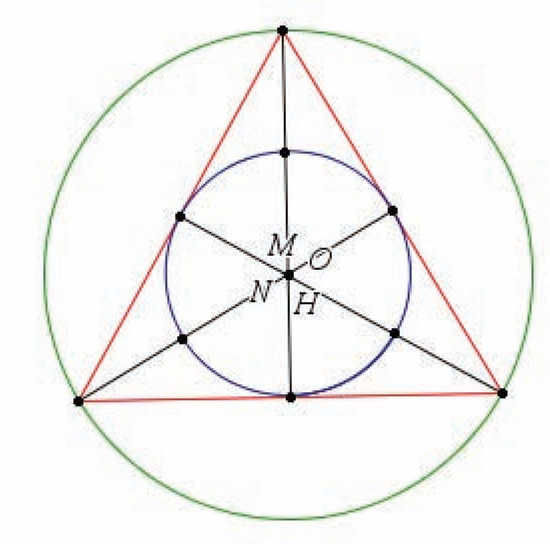
Hvis vi ser på en ligebenet trekant (figur 5) ses det, at Eulerlinjen ligger på den ene vinkels halveringslinje, samt at højden og medianen for den ene vinkel er sammenfaldende. Det betyder, at højden og medianen for en vinkel falder sammen med Eulerlinjen. Samtidig ses det af figur 5, at Nipunktscirklen er blevet til en *"ottepunktscirkel"*, da H_1 og M_1 er sammenfaldende.



Figur 5 – Ligebenet trekant

Kigger vi derimod på en ligesidet trekant (figur 6) ses det, at Eulerlinjen ikke længere er en linje, men er blevet til ét enkelt punkt, samt at Nipunktscirklen ikke længere er en cirkel, hvor den bliver forbundet af ni punkter, men kun seks punkter.

Der er mange flere interessante aspekter af Nipunktscirklen og Eulerlinjen, der kunne undersøges, eksempler på disse kunne være: Hvordan ser Eulerlinjen og Nipunktscirklen ud for en retvinklet trekant? Hvilken betydning har orthocentret for Nipunktscirklens? Hvordan ville Nipunktscirklen se ud, hvis man gik fra planen til rummet? Ville det så stadig være en Nipunktscirkel? Disse spørgsmål kunne være interessante at eksperimentere med. Så selvom man allerede havde kendskab til Nipunktscirklen i 1800–tallet, er der altså stadig meget mere at undersøge.



Figur 6 – Ligesidet trekant

Links

Eksempler på opgaver:
emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/skr-opg/opgaver/geoa9043.htm
natnet.dk/?viewtype=html&collectionid=71&pageid=26

Bøger

Eksempler på bøger til undervisningen:
Carstensen, Jens: *Euklidisk geometri,* 1. udg., Systime A/S, 2002. I denne bog gennemgås beviser for specielle linjer i trekanten, efterfølgende er beviset for eksistensen af Eulerlinjen og Nipunktscirklen.
Matematiske Ideer, 1. udg., Matematiklærerforeningen, 1993. Bogen henvender sig primært til elever, hvor matematiske hjælpemidler bliver gennemgået, samt beviset for Nipunktscirklen.
Herefter følger der en litteraturliste, hvis man ønsker yderligere at fordybe sig i emnet.

Redaktionens kommentar

Siden 2009 har det været muligt at skrive en formidlingsopgave som srp i et naturvidenskabeligt fag sammen med dansk. Artiklen ovenfor er et eksempel på formidlingsdelen i et srp med LMFK–bladets læsere som modtagergruppe. Selve projektet indeholder også en matematisk del, hvor nipunktscirklen er undersøgt nærmere i et matematikfagligt sprog samt en danskfaglig del, hvor artiklen er analyseret med henblik på sprog og sproglige virkemidler, valg af layout, artiklens opbygning m.m. i forhold til formidling til målgruppen.

Vi bringer artiklen, som den er modtaget, med ganske få nødvendige ændringer mht. layout. Samtlige illustrationer er originale, og eleven har haft mulighed for at foretage enkelte rettelser.