Et lille "morsomt" trekantsbevis

Helge Leonard Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Den største side i en trekant ligger overfor den største vinkel, den næststørste side ligger overfor den næststørste vinkel, og den mindste side ligger overfor den mindste vinkel.

Beviset for påstanden kan føres på flere måder, og det bevis, jeg nu vil fremføre, vil nok ikke egne sig til at fyre af i en gymnasieklasse.

Antag at vinkel A er større end vinkel B, der igen er større end vinkel C. Det medfører så, at

$$\cos(A) < \cos(B) < \cos(C)$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} < \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} < \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Vi ganger nu med det positive tal $2abc$ alle tre steder og får så, at

$$a\cdot(b^2+c^2-a^2) < b\cdot(c^2+a^2-b^2)$$

idet vi kun behøver at se på de to første led i uligheden. Efter lidt ommøblering får vi, at

$$a^3-b^3 > a\cdot b^2 - b\cdot a^2 + a\cdot c^2 - b\cdot c^2$$

Det kan omskrives til

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) > ab(b-a)+c^2(a-b)$$

Hvis vi så lægger $ab(a-b)$ til på begge sider, får vi, at

$$(a-b)(a^2+2ab+b^2) > c^2(a-b)$$

der kan omskrives til

$$(a-b)(a+b)^2 > c^2(a-b)$$

Da vi i forvejen ved, at $(a+b) > c$, ved vi, at $(a+b)^2 > c^2$, hvorfor der så må gælde, at tallet $(a-b)$ er positivt, hvilket vil sige at $a > b$.

På tilsvarende måde kan man vise at $b > c$, hvorfor vi kan se, at $a > b > c$. Jeg vil stoppe her.