En optimeringsopgave

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

For at demonstrere en anvendelse af differentialregning benyttes ofte det klassiske problem: Med en given længde trådhegn skal man indhegne et rektangulært jordstykke, så det indeholder det størst mulige areal.

Traditionel løsning

Hvis p er længden af trådhegnet og x og y er længde og bredde af jordstykket, skal $A = x{\cdot}y$ gøres så stor som mulig under betingelsen $x + y = \frac{1}{2}p$. Vi finder, at

$$y = \tfrac{1}{2}p - x\,,$$

så arealet er bestemt ved

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(\tfrac{1}{2}p - x\right) = -x^2 + \tfrac{1}{2}px\,.$$

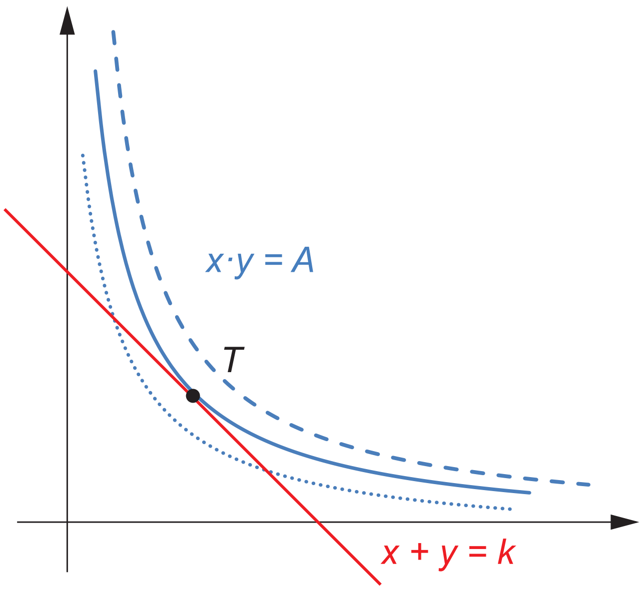
Vi får (lidt summarisk), at

$$A'(x) = -2x + \tfrac{1}{2}p$$

så at

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{4}p..$$

Imidlertid klarer man sig bedst uden differentialregning, idet det grafiske billede af $A(x)$ er en parabel, hvis skæringspunkter med x–aksen er 0 og $\frac{1}{2}p$, så funktionens maksimum antages for x = $\frac{1}{4}p$.



Vi kan illustrere problemet med en figur. Den rette linje $x + y = \frac{1}{2}p$ tegnes. Vi skal gøre $A = x{\cdot}y$ så stor som mulig. Grafen for $x{\cdot}y = k$ er en hyperbel, og for voksende værdier af k flytter hyperblen sig 'mod nordøst' i 1. kvadrant. Den optimale løsning findes i hyperblens toppunkt, hvor $x = y$. Så er x og y begge lig med $\sqrt{A}$ og vi får, at x = $\frac{1}{4}p$.

Samme figur løser den ækvivalente opgave: Find det mindst mulige forbrug af trådhegn, der skal bruges til at indhegne et rektangulært jordstykke med et givet areal.

Udvidelse af problemet

Vi modificerer nu problemet, idet vi antager, at prisen for trådhegnets vandrette og lodrette side ikke er den samme. Prisen kan være a kr. pr. enhed i x–retningen og b kr. pr. enhed i y–retningen. Vi ønsker at minimere omkostningerne, når arealet A er fast.

Omkostningerne C er

$$C = 2ax + 2by.$$

Vi har, at

$$x \cdot y = A \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{A}{x}\,,$$

hvoraf

$$C(x) = 2ax + \frac{2bA}{x}\,,$$

så at

$$C'(x) = 2a - \frac{2bA}{x^2}\,,$$

og

$$C'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2bA}{x^2} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{bA}{a}}\,.$$

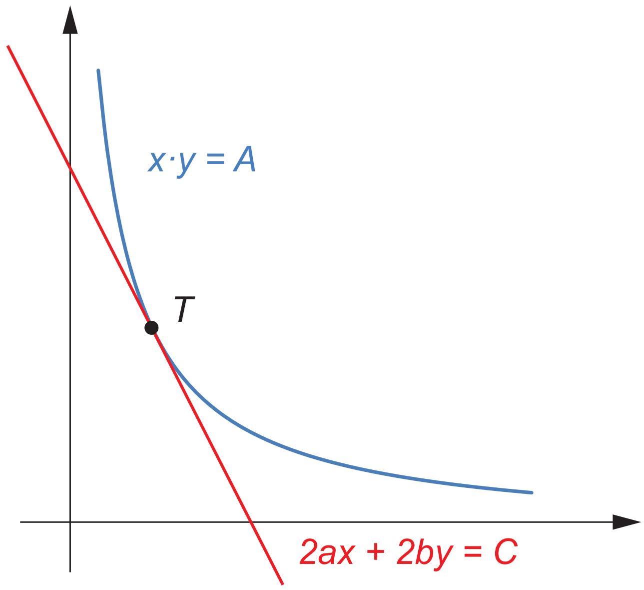
Derefter foretages en fortegnsundersøgelse af $C'(x)$.

Imidlertid kan vi også i dette tilfælde komme til løsningen uden brug af differentialregning. Den mindste værdi af C opnås i det punkt T, hvor linjen med ligningen $2ax + 2by = C$ tangerer hyperblen med ligningen $x \cdot y = A$. De to grafers røringspunkt fås af ligningerne

$$y = \frac{A}{x} \quad \text{og} \quad by = \frac{C}{2} - ax.$$

Vi finder, at

$$\frac{Ab}{x} = \frac{C}{2} - ax \quad \Leftrightarrow \quad 2Ab = Cx - 2ax^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$2ax^2 - Cx + 2bA = 0$$



Da hyperblen og linjen har netop et punkt fælles, er diskriminanten 0, dvs.

$$C^2 - 4 \cdot 2a \cdot 2bA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C^2 = 16abA \ ,$$

og roden i ligningen er

$$x = \frac{C}{4a} = \frac{\sqrt{16abA}}{4a} = \sqrt{\frac{bA}{a}} \ .$$

Derefter får vi

$$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{\frac{bA}{a}}} = \sqrt{\frac{aA}{b}} \ .$$

Hvis på den anden side omkostningerne C til trådhegnet er faste, opnås det største areal for

$$x = \frac{C}{4a} \ , \quad y = \frac{C}{4b} \ ,$$

og dette giver $A = \dfrac{C^2}{16ab}$.

Man kan se på andre tilfælde end ovenfor nævnte, idet man kan antage, at den ene side af grundstykket vender op til en mur, hvor der ikke skal bruges trådhegn. I så fald er $y + 2x = C$. En anden mulighed er at gå ud fra, at den ene side af grundstykket får udgifterne delt med naboen, så $C = 2y + \frac{3}{2}x$.

Henvisning

Marcus Bizony Bishops: *Fencing a Field*, Mathematical Digest, October 2012, University of Cape Town.