Bemærkning om Jens Carstensens artikel

Poul Rose, Vordingborg

Det drejer sig om artiklen i LMFK–bladet, januar 2013 side 15, om det problem at konstruere en trekant, når man kender højderne. I et taleksempel starter Jens Carstensen med givne måltal for højderne. Med lange beregninger kommer han frem til måltal for siderne og slutter indlægget med udsagnet:

Konstruktionerne ovenfor kan gennemføres med passer og lineal

Det har jeg set nærmere på. Carstensen har ret, hvis de givne måltal for højderne tilhører mængden af rationale tal eller mængden af kvadratrødder af positive rationale tal. I taleksemplet finder Jens Carstensen, at en af den søgte trekants sider er lig med $\frac{32}{\sqrt{15}}$. Et liniestykke med denne længde kan tegnes ved hjælp af en mellemproportionalkonstruktion og en fjerdeproportionalkonstruktion.

Men trekanten kan konstrueres uden at regne så meget. Herunder ses en variant af Jens Carstensens fremgangsmåde. Man starter som Carstensen med følgende udtryk:

$$a : b : c = \frac{2T}{h_a} : \frac{2T}{h_b} : \frac{2T}{h_c}$$

hvor højderne nu er givne liniestykker – hvilket i øvrigt er i tråd med klassisk geometri. Udtrykket består, selv om man føjer en faktor til hver af brøkernes tæller. Og udtrykket består, selv om man erstatter hver enkelt brøks tæller med et tilfældigt areal. Lad dette areal være arealet af et rektangel med siderne p og q.

Liniestykkerne p og q kan vælges frit, men af praktiske grunde er det tilrådeligt at vælge dem, så de er af samme størrelsesorden som de givne højder. Så har man:

$$a : b : c = \frac{p \cdot q}{h_a} : \frac{p \cdot q}{h_b} : \frac{p \cdot q}{h_c}$$

De tre brøker betegnes med henholdsvis α, β og γ. $\alpha = \frac{p \cdot q}{h_a}$. Analogt for β og γ.

α er et liniestykke, der kan tegnes ved hjælp af en fjerdeproportionalkonstruktion. Analogt for β og γ. Man har:

$$a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$$

Man kan nu konstruere en trekant med siderne α, β og γ. Den er ligedannet med den søgte trekant.

Så skal trekanten "skaleres". Parallelt med α tegnes en linie i afstanden h_a. Man forlænger eventuelt trekantens sider, finder et skæringspunkt og tegner færdig. Her er der en usædvanlig mulighed for privat at vurdere sin omhu med at tegne. Man kan sammenholde de to andre højder i den færdige trekant med de givne.

Bemærkning: For at konstruere en trekant med siderne α, β og γ må den største af siderne være mindre end summen af de to andre. Ved analyse fandt jeg, at så skal den mindste af højderne være større end produktet af de to andre divideret med deres sum. Det svarer til Carstensens ulighed.