Om titalslogaritmen

Alija Muminagić, Nykøbing F. & Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Vi skal vise en sætning om titalslogaritmens irrationalitet, nemlig:

Sætning. Hvis r er et rationalt tal, der ikke er en hel potens af 10, er log r irrational.

Bevis. Vi benytter kontraposition og antager, at $\log r = \frac{p}{q}$. Vi skal vise, at r er en hel potens af 10, dvs. at der findes indbyrdes primiske tal m og n, så

$$10^{\frac{p}{q}} = r = \frac{m}{n}\,.$$

Vi skal altså vise, at

$$10^p = \left(\tfrac{m}{n}\right)^q\,. \qquad (1)$$

Vi deler op i tre tilfælde.

I. p = 0. Så er $\log r = 0$, så $r = 1$. Altså er r en hel potens af 10.

II. p > 0. Her er 10^p et helt tal, og af (1) følger, at $n = 1$, så

$$10^p = m^q \quad \Leftrightarrow \quad 2^p \cdot 5^p = m^q\,.$$

Altså findes naturlige tal a og b så

$$m = 2^a \cdot 5^b\,,$$

og dermed

$$2^p \cdot 5^p = m^q = 2^{aq} \cdot 5^{bq}\,.$$

hvoraf

$$\frac{p}{q} = a \quad \text{og} \quad \frac{p}{q} = b\,.$$

Altså er

$$r = 10^{\frac{p}{q}} = 10^a$$

en hel potens af 10.

III. p < 0. Vi sætter $p = -p_1$, hvor $p_1 > 0$. Ligningen (1) er nu:

$$10^{-p_1} = \left(\tfrac{m}{n}\right)^q \quad \Leftrightarrow \quad 10^{p_1} = \left(\tfrac{n}{m}\right)^q.$$

Som i tilfælde II ser vi, at $m = 1$ og

$$r = \frac{m}{n} = 10^{-a}\,,$$

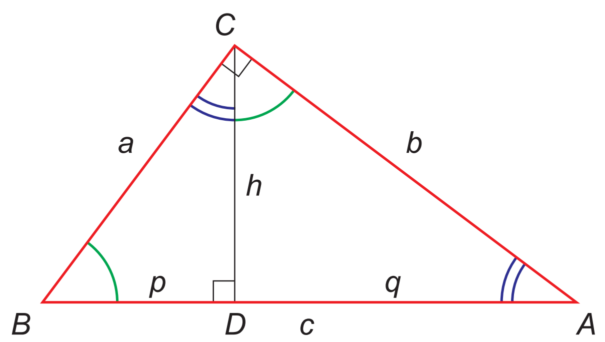
som er en hel potens af 10.

I alle tre tilfælde er altså r en hel potens af 10.

Den retvinklede trekant

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

I LMFK–Bladet nr. 4 gjorde Allan Tarp opmærksom på nogle gammelkendte sætninger om den retvinklede trekant. Man bør dog afstå fra at blande trigonometri ind i sagen.



Højden fra den rette vinkel C har fodpunkt i D på hypotenusen. Vi sætter $BD = p$ og $AD = q$. Så er $p + q = c$.

De to små trekanter ΔACD og ΔBCD er indbyrdes ensvinklede og desuden ensvinklede med ΔABC. Der er to tilfælde at gennemgå.
I. En lille trekant er ensvinklet med ΔABC.
Vi vælger ΔBCD og får

$$\frac{p}{a} = \frac{h}{b} = \frac{a}{c}\,.$$

- Her kan vi vælge at se på den første og den sidste brøk:

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}\,.$$

Dette kaldtes i gamle dage en *proportion*, og de to a'er er mellemleddene. Vi har altså, at a er *mellemproportional* mellem p og c eller som det hed i forne tider:

> I en retvinklet trekant er en katete mellemproportional mellem sin projektion på hypotenusen og hele hypotenusen.

- Hvis vi vælger de to sidste brøker, får vi

$$\frac{h}{b}=\frac{a}{c} \qquad \text{eller} \qquad h=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Heri ligger i virkeligheden blot, at både $a{\cdot}b$ og $h{\cdot}c$ er det dobbelte af trekantens areal.

II. De to små trekanter er ensvinklede.
Her får vi

$$\frac{q}{h}=\frac{h}{p}=\frac{b}{a}.$$

De to første brøker danner en proportion, som kan udtrykkes således:

> Højden er mellemproportional til de stykker, hvori den deler hypotenusen.

Af den første proportion ovenfor får vi

$$p=\frac{a^2}{c} \qquad \text{og tilsvarende} \qquad q=\frac{b^2}{c},$$

og ved addition får vi Pythagoras sætning:

$$c=p+q=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{c} \qquad \text{hvoraf} \qquad a^2+b^2=c^2.$$

Læg i øvrigt mærke til, at sidelængderne i ΔBCD er

$$(h,p,a)=\left(\frac{ab}{c},\frac{a^2}{c},a\right)=\frac{a}{c}\cdot(b,a,c)$$

og at sidelængderne i ΔCAD er

$$(q,h,b)=\left(\frac{b^2}{c},\frac{ab}{c},b\right)=\frac{b}{c}\cdot(b,a,c).$$

Det er ikke overraskende, fordi sideforholdet mellem ΔBCD og ΔABC netop er $\frac{a}{c}$ (forholdet mellem hypotenuserne), og sideforholdet mellem ΔCAD og ΔABC er $\frac{b}{c}$.