En trekantkonstruktion

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Poul Rose efterlyser i LMFK–bladet for september en konstruktion af trekanten, hvis længderne af de tre højder er givet.

Lad de givne højders længder være h_a, h_b og h_c. Hvis T er trekantens areal, er

$$a : b : c = \frac{2T}{h_a} : \frac{2T}{h_b} : \frac{2T}{h_c} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = h_b h_c : h_a h_c : h_a h_b$$

Vi kan altså konstruere en trekant med sidelængder $h_b h_c$, $h_a h_c$ og $h_a h_b$ og derefter skalere denne trekant passende, så dens højder stemmer overens med de givne linjestykker.

Antag fx at vi får oplyst, at $h_a = 3$, $h_b = 4$ og $h_c = 6$. Så får vi, at sideforholdet i den søgte trekant er

$$a : b : c = 24 : 18 : 12 = 4 : 3 : 2$$

I en trekant med sidelængder $a = 4$, $b = 3$ og $c = 2$ kan vi ved hjælp af Herons formel finde arealet T:

$$T = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Højderne h_1, h_2 og h_3 bliver derfor

$$\frac{1}{2} a \cdot h_1 = T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h_1 = \frac{3\sqrt{15}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad h_1 = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

og tilsvarende er

$$h_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad , \quad h_3 = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Forholdet mellem disse højder er netop 3:4:6. Hvis vi forstørrer trekanten ved faktoren $\frac{8}{\sqrt{15}}$, får højderne

$$h_1^* = \frac{3\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = 3$$

$$h_2^* = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = 4$$

$$h_3^* = \frac{3\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = 6$$

som ønsket. Siderne i den søgte trekant får længderne

$$a_1 = 4 \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{32}{\sqrt{15}}$$

$$b_1 = 3 \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{24}{\sqrt{15}}$$

$$c_1 = 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

Der er betingelser for, at konstruktionen kan lykkes. Hvis vi går ud fra, at sidelængder og højder navngives, så $a > b > c$ og dermed $h_a < h_b < h_c$, gælder efter trekantuligheden, at

$$a < b + c \quad \Leftrightarrow \quad h_b h_c < h_a h_c + h_a h_b \quad \Leftrightarrow \quad h_a > \frac{h_b \cdot h_c}{h_b + h_c}$$

Denne betingelse er opfyldt for $h_a = 3$, $h_b = 4$ og $h_c = 6$, idet

$$3 > \frac{4 \cdot 6}{4 + 6}$$

men ikke hvis $h_a = 3$, $h_b = 7$ og $h_c = 10$.

Konstruktionerne ovenfor kan gennemføres med passer og lineal, hvorimod der ikke findes nogen konstruktion af trekanten, hvis længderne af dens tre vinkelhalveringslinjer er givet.

Henvisning

Kurt Herterich, *Die Konstruktion von Dreiecken*, Ernst Klett Verlag, 1986.

Matematik