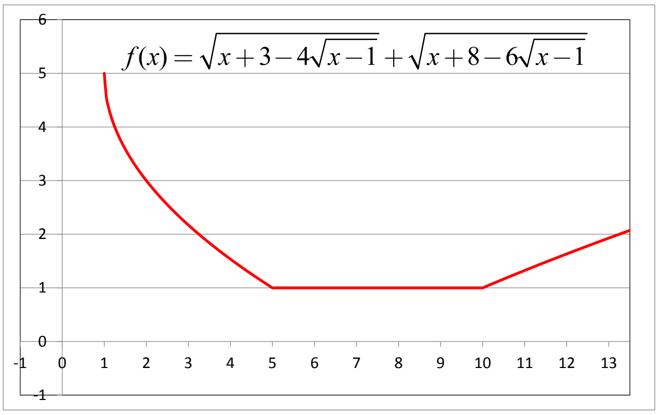
En interessant funktion

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Vore elever i gymnasiet har adgang til avancerede grafregnere og/eller matematikprogrammer. I disse faciliteter kan de indtaste funktionen

$$f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\ .$$

Derved får man det grafiske billede som vist på figuren. Det ser (besynderligt nok) ud til, at funktionen er konstant i intervallet [5;10]. Det er derefter problemet at vise, at dette faktisk er tilfældet – og det kræver en del algebra, som vore elever ikke er i stand til at udføre. Specielt skal man kunne regne med kvadratrødder, og denne eksotiske disciplin er jo afskaffet i gymnasiet.



Definitionsmængden. Vi må selvfølgelig kræve, at samtlige optrædende radikander er ikke–negative, dvs. først kræver vi, at $x \geq 1$. Desuden må

$$x+3-4\sqrt{x-1}\ \geq\ 0$$

Da $x \geq 1$ kan vi omskrive dette således:

$$x+3 \geq 4\sqrt{x-1}\quad\Leftrightarrow\quad x^2+6x+9 \geq 16x-16$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-10x+25 \geq 0\quad\Leftrightarrow\quad (x-5)^2 \geq 0\ ,$$

hvilket er opfyldt for alle x. Desuden skal vi kræve, at

$$x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0$$

hvilket på grund af kravet $x \geq 1$ kan omskrives til

$$x+8 \geq 6\sqrt{x-1}\quad\Leftrightarrow\quad x^2+16x+64\ \geq\ 36x-36$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-20x+100 \geq 0\quad\Leftrightarrow\quad (x-10)^2 \geq 0$$

og dette er opfyldt for alle x.

Konklusion: Definitionsmængden er $x \geq 1$.

Omskrivning af forskriften: Ved lidt pusleri opdager vi, at

$$x+3-4\sqrt{x-1}=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2\quad \text{og}$$

$$x+8-6\sqrt{x-1}=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2$$

Altså kan vi skrive forskriften sådan:

$$f(x)=\sqrt{\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2}$$

Nu er

$$2-\sqrt{x-1} \geq 0\quad\Leftrightarrow\quad x-1 \leq 4\quad\Leftrightarrow\quad x \leq 5\ \ (\text{og } x \geq 1)$$

$$2-\sqrt{x-1} \leq 0\quad\Leftrightarrow\quad x \geq 5$$

$$3-\sqrt{x-1} \geq 0\quad\Leftrightarrow\quad x-1 \leq 9\quad\Leftrightarrow\quad x \leq 10\ \ (\text{og } x \geq 1)$$

$$3-\sqrt{x-1} \leq 0\quad\Leftrightarrow\quad x \geq 10$$

Altså gælder

for $1 \leq x \leq 5$:

$$f(x)=2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=5-2\sqrt{x-1}$$

for $5 \leq x \leq 10$:

$$f(x)=\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1$$

for $x \geq 10$:

$$f(x)=\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=2\sqrt{x-1}-5\ .$$

Dermed er eftervist, at f er konstant i intervallet [5;10].

Henvisning

Crux Mathematicorum 1988, side 421–422.

Matematik