Forholdscirklen – et geometrisk bevis

Ole Witt-Hansen, pensioneret lektor

I Novembernummeret af LMFK–bladet, har Alija Muminagic og Jens Carstensen et indlæg om forholdscirklen. Og som de skriver, nu er den muligvis glemt. Der var nu et eller andet, der ringede, da jeg så ordet *forholdscirkel*, og da jeg stadig har Professor Julius Petersens system fra 1958 (som jeg selv læste efter i gymnasiet) samt A. F. Andersen og Poul Mogensens Matematik fra 1965, samt selvfølgelig Kristensen og Rindung, så tog det ikke så lang tid at finde frem til et bevis for forholdscirklen hos Julius Petersen.

Til de som vedholdende påstår, at det faglige niveau (og omfang) i matematik ikke har ændret sig afgørende de sidste 30 år, vil det nok alligevel være temmelig skræmmende at læse fx de 800 tætskrevne sider i A. F. Andersen og Poul Mogensens bøger.

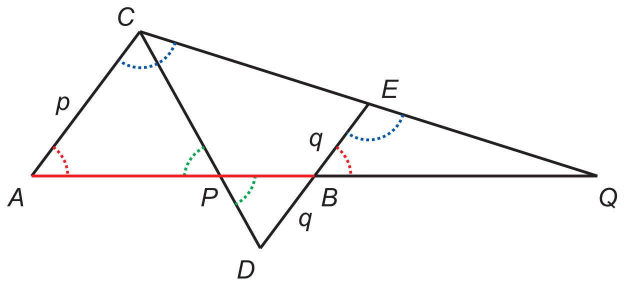
En ting er i alle tilfælde fælles for alle disse lærebøger, nemlig, at de er bygget fuldstændig systematisk op med konsekvent bevisførelse, så man konsekvent anvender resultatet fra tidligere sætninger til at bevise nye sætninger. Således også i beviset for forholdscirklen.

Vi viser først, at der for et liniestykke AB findes netop to punkter P og Q, så forholdet

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|QA|}{|QB|} = \frac{p}{q}$$

hvor p og q er hele positive tal og $p \neq q$.

Man siger at dette er en harmonisk deling af AB i forholdet p:q.



Bevis: Fra A afsættes stykket p i en i øvrigt vilkårlig spids vinkel. Liniestykkets endepunkt betegnes C. Gennem B tegnes en linie parallel med AC, og stykket q afsættes til begge sider.

Matematik

Under anvendelse af aksiomerne: Når to parallelle linier overskæres af en tredje, er ensliggende vinkler lige store, og når to linier skærer hinanden, er modstående vinkler lige store, kan man indse, at

$$\Delta ACP \sim \Delta BDP \quad \text{og} \quad \Delta ACQ \sim \Delta BEQ$$

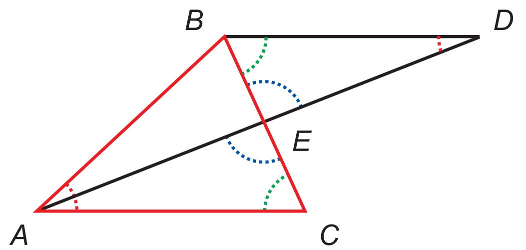
Heraf følger

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{p}{q} \quad \text{og} \quad \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AC|}{|BE|} = \frac{p}{q}$$

Forholdet mellem afstandene $|PA|:|PB|$ og $|QA|:|QB|$ er det samme, nemlig $p:q$.

Vi viser derefter den velkendte sætning: I en vilkårlig trekant deler vinkelhalveringslinien den modstående side i samme forhold som de hosliggende sider, samt den mindre kendte sætning, at vinkelhalveringslinien til nabovinklen i en trekant, "deler" den modstående side i samme harmoniske forhold.

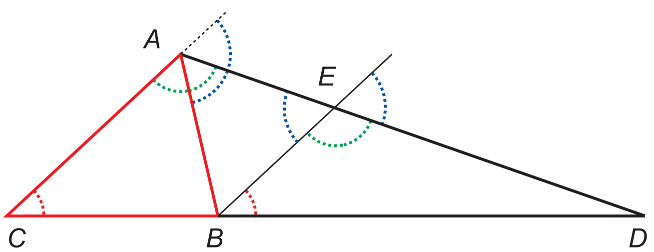
Af hensyn til overskueligheden deler vi beviset op i to dele.



I trekant ABC er tegnet vinkelhalveringslinien fra A og forlænget ud over siden BC. Gennem B tegnes en linie parallel med AC. Skæringspunktet med vinkelhalveringslinien betegnes D. Det ses at $\Delta BDE \sim \Delta CAE$. Endvidere er ΔABD ligebenet, så $|AB| = |BD|$. Heraf følger:

$$\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|AC|}$$

Men da $|AB| = |BD|$ følger det: $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, hvilket skulle vises.

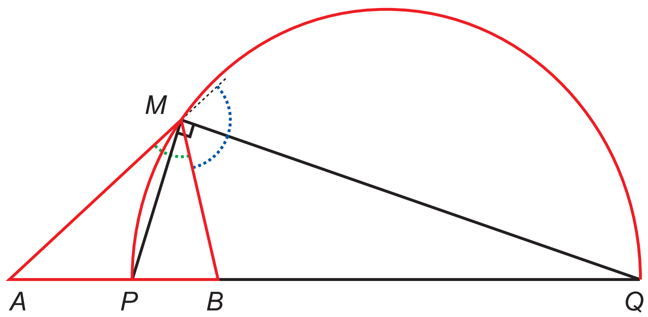


I trekant ABC har vi tegnet vinkelhalveringslinien til nabovinklen til vinkel A og markeret liniens skæringspunkt D med forlængelsen af CB. Gennem B er desuden tegnet en linie parallel med AC. Skæringspunktet med AD betegnes E. Det ses nu, at $\Delta BED \sim \Delta CAD$ og endvidere, at ΔABE er ligebenet, så $|AB| = |BE|$. Heraf følger:

$$\frac{|BE|}{|CA|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

Men da $|AB| = |BE|$ følger det, at $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$, hvilket skulle vises.

Med beviset for disse to små sætninger ovenfor, er det ganske simpelt at føre bevis for forholdscirklen som det geometriske sted for de punkter M, hvor afstandene til to givne punkter A og B har et givet forhold m.



På figuren er tegnet liniestykket AB, samt et punkt M, som opfylder betingelsen $\frac{|MA|}{|MB|} = m$.

I trekant AMB, tegnes vinkelhalveringslinien til M, som skærer AB i P, samt vinkelhalveringslinien til nabovinklen til M, som skærer forlængelsen af AB i Q. Ifølge det foregående opfylder P og Q den samme betingelse som M.

Vinkelhalveringslinierne til en vinkel og dens nabovinkel er ortogonale, så M ligger på synsvinkelbuen med PQ som diameter, som derfor er det geometriske sted for forholdscirklen med hensyn til liniestykket AB.

Den omvendte sætning, at ethvert punkt M på cirklen opfylder $\frac{|MA|}{|MB|} = m$, kan indses som følger:
Lad M være et punkt på cirklen. Man forbinder M med A. Dernæst bestemmes et punkt M1 på linien MA, således, at $\frac{|M_1A|}{|M_1B|} = m$. Ifølge det foregående, ligger M_1 på forholdscirklen og derfor lig med M.

Et bevis er jo et bevis, men jeg mener nu nok, at det geometriske bevis i forhold til det analytisk geometriske scorer på det kunstneriske indtryk.

Jeg har tidligere udtrykt en vis fortrydelse over, at man i gymnasiets matematikbøger ikke længere holder de forskellige discipliner adskilt. Plangeometri, analytisk geometri, vektorregning osv. Ligesom bevisførelse og den stringente systematik er gået op i eksempler og eksperimenter.

Hvis man kan formulere matematik som analytisk problemløsning ved hjælp af logiske følgeslutninger, så var den konstruktionsgeometri, som jeg lærte i mellemskolen, i allerhøjeste grad lødig. Selvom den muligvis ikke havde så mange "samfundsrelevante anvendelser", så havde beviserne i plangeometrien til gengæld en elementær intellektuel appel hos en gruppe af elever.

At forsøge at sætte elever i en 9. klasse eller en 1.g til at lære noget som ovenstående er nok ikke muligt, og det er jo lidt synd – for det er jo sådan set ikke eleverne, der er blevet dummere.