Kagedeling

Danni T. Pedersen, Odense Katedralskole

Problemet er velkendt: En kage skal deles, så alle bliver tilfredse med det stykke de får. Specielt i familier med mindre børn kan det kræve store diplomatiske evner af forældrene at skære kage ud, så ingen føler sig snydt. Matematisk set er problemet interessant, fordi det ikke er trivielt, når der er tre eller flere om at dele kagen.

Generelt arbejdes der med to begreber inden for kagedeling: Retfærdig og misundelsesfri. Ved en retfærdig kagedeling blandt n personer mener alle n personer, at de har fået mindst $1/n$ af kagen. Vurderingen af, hvor meget den enkelte har fået, er bestemt af den enkeltes eget mål. Derfor kan man i en situation, hvor fx 3 personer skal dele en kage, godt ende med, at alle tre mener, de har fået mere end 1/3 af kagen.

En kagedeling er misundelsesfri, hvis der ikke er nogen, der føler, at en anden har fået et stykke, de hellere ville have haft. Dette kriterium genkendes givetvis, som det vanskeligste at opfylde i praksis i børnefamilier. Jeg tror dog, det primært skyldes, at børnenes eget personlige mål ændres, når de ser deres søskendes stykke kage.

Det skal understreges, at ligesom det ofte er tilfældet i praksis, gælder også i matematisk kagedeling, at den enkelte ønsker det størst mulige stykke, igen vurderet efter den enkeltes eget mål.

En misundelsesfri kagedeling er også retfærdig. Der kan argumenteres for dette ved at antage, at vi har en ikke–retfærdig kagedeling blandt n personer. Der vil da være mindst en af de n personer, der mener, at han ikke har fået mindst $1/n$ af kagen. Ifølge hans eget mål må der derfor være mindst én anden person, der har fået mere end $1/n$ af kagen (idet hans eget mål skal summere til 1, svarende til hele kagen). Han vil hellere have haft det stykke, der er større end $1/n$ af kagen. Derfor er kagedelingen ikke misundelsesfri.

Gælder der også generelt, at en retfærdig kagedeling også er misundelsesfri? Svaret er nej. Nedenfor gives et eksempel på en retfærdig kagedeling, der ikke er misundelsesfri, men først betragtes det simpleste tilfælde, nemlig kagedeling for $n = 2$. Strengt taget er tilfældene $n = 0$ og $n = 1$ de simpleste, men de er, i hvert fald matematisk set (i modsætning til praksis) uinteressante.

Den mest brugte metode, når A og B skal dele, er at A skærer kagen, og B vælger først. A har skåret kagen og mener derfor, at de to stykker er lige store (vi går ud fra, at A ikke bevidst har skåret kagen ud i 2 ikke lige store stykker i håb om, at B vælger det mindste). Uanset hvilket stykke A ender med, vil A derfor, ifølge A's eget mål, have fået præcis halvdelen af kagen, og A er ikke misundelig på B, fordi B, igen ifølge A's eget mål, også har fået præcis halvdelen af kagen. B vælger først, og tager derfor det stykke, der ifølge B's eget mål, er det største. Ergo mener B, at han har fået mindst halvdelen, og han er ikke misundelig på A. Metoden her illustrerer, at for $n = 2$ er begreberne retfærdig og misundelsesfri ækvivalente i den forstand, at man ikke kan have det ene uden at have det andet. For $n \geq 3$ er dette ikke tilfældet.

Lad os antage, at A, B og C skal dele en kage. Én metode er den såkaldte 'flyvende kniv'. En af personerne, fx A, fører langsomt kniven henover kagen startende fra den ene ende. Mens dette gøres kan A, B og C råbe *cut*, når de mener, at der skal skæres. Den første (fx B), der råber *cut*, får det stykke, der skæres af. Det tilbageværende stykke deles mellem de to andre (A og C), igen ved, at den ene råber *cut*. Skulle det ske, at 2 råber samtidig, gives stykket til den ene af dem. Metoden er retfærdig, da alle vil få mindst 1/3 af kagen (ellers ville de jo have råbt *cut* tidligere), men den er ikke misundelsesfri. I ovenstående tilfælde kan det ske, at delingen mellem A og C fører til, at fx A får et stykke, som B mener, er større end B's eget.

'Del og del igen' kalder man en anden metode til deling for $n = 3$. Her deler først A og B, derefter deler A og B deres stykker i 3 dele, og C vælger et stykke fra hver af A og B's 3–deling. Denne metode er også retfærdig, men ikke misundelsesfri. Det overlades til læseren at overveje dette.

Metoden herunder, for $n = 3$, er retfærdig, men ikke misundelsesfri. Igen overlades det til læseren, at argumentere for dette.

1. A skærer kagen i 3 stykker
2. B skal enten
   - sige pas og sende videre til C, hvis hun synes, at der er mindst to stykker, der er lige store, eller
   - markere to stykker, hun synes er mindre end det tredje
3. Hvis B sagde pas, vælger C først et stykke, så vælger B og til sidst A
4. Hvis B markerede to stykker, får C samme tilbud som B: Sig pas eller marker to stykker (C kender ikke B's markering)
5. Hvis C sagde pas, vælger de i rækkefølgen B, C, A
6. Hvis C markerede to stykker, må der være mindst ét stykke som både B og C har markeret. Det stykke får A.
7. De to sidste stykker samles til ét stykke, og B og C deler dette

For noget tid siden købte jeg 10 kedelige Dancake roulader på tilbud og tog dem med til en matematiktime. Først præsenteredes den simple kagedeling mellem 2 personer, derefter de to retfærdige men ikke–misundelsesfrie metoder for $n = 3$. Eleverne fik da kagerne ud i 3–mandsgrupper og fik til opgave at finde en deling, der både er retfærdig og misundelsesfri for $n = 3$. Jeg har aldrig tidligere oplevet så passioneret debat i en matematiktime. Der blev tænkt og argumenteret i en grad, som ikke ses ved traditionel opgaveregning. Til slut gennemgik grupperne den retfærdige og misundelsesfri deling, som beskrevet herunder, i praksis.

1. A skærer kagen i 3 dele
2. B skal enten
   - sige pas og sende videre til C, hvis hun syntes, at der er to stykker, der er lige store, eller
   - skære det største stykke til, så der bliver mindst 2 lige store stykker, som hun mener, er størst (der er så i alt 4 stykker – 3 store stykker og en rest)
3. Hvis B sagde pas vælges et stykke i rækkefølgen C, B, A
4. Hvis ikke B sagde pas, vælges igen i rækkefølgen C, B, A, men B skal vælge det stykke, hun skar til, hvis ikke C har valgt det
5. Den af B eller C, der ikke fik det stykke, som er skåret til, skal nu dele resten (det stykke, som blevet skåret af) i 3 dele – vi antager her, at det er B, der deler reststykket i 3 dele
6. De tre dele af reststykket vælges i rækkefølgen C, A, B (det ville have været B, A, C, hvis det var C, der havde delt reststykket)

Næste oplagte skridt er at generalisere ovenstående til en retfærdig og misundelsesfri metode for deling mellem n personer, men det lader sig ikke umiddelbart gøre.

Der findes en del litteratur om kagedeling. Det første jeg stødte på var en artikel [1], hvori det vises, at der findes en retfærdig og misundelsesfri deling mellem n personer. Artiklen er matematiktung men interessant, fordi der også refereres en retfærdig og misundelsesfri version af den flyvende kniv. Desuden omtales en metode til en misundelsesfri metode for vilkårligt n, men som kan give hver person tælleligt mange små stykker kage. [4] giver en kort introduktion på dansk, suppleret med nogle få opgaver. Der refereres en anden misundelsesfri metode for $n = 3$ end ovenstående.

I [2] opereres med såkaldte protokoller (desuden kaldes retfærdige delinger for proportionelle). Protokoller er opskrifter, der indeholder instruktioner for, hvordan kagen skal deles. Ud over det meste af indholdet i denne artikel, gives en generalisering af den retfærdige og misundelsesfri deling for $n = 3$ til en retfærdig deling mellem n personer. Artiklen slutter med en både retfærdig og misundelsesfri protokol for $n = 4$, som kan generaliseres til vilkårligt n. I [3] vises til gengæld, at der ikke findes en misundelsesfri protokol for vilkårligt n, der giver hver person et sammenhængende stykke kage. Måske et godt argument i praksis: *Hvis alle skal være tilfredse, ender I med tælleligt mange krummer*.

[1] *How to Cut a Cake Fairly*, Walter Stromquist Source, The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 8 (Oct., 1980), pp. 640–644

[2] *An Envy–Free Cake Division Protocol*, Steven J. Brams and Alan D. Taylor, The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 1 (Jan., 1995), pp. 9–18

[3] *Envy–free cake divisions cannot be found by finite protocols*, Walter Stromquist, The Electronic Journal of Combinatorics, 15 (2008)

[4] *Matematisk kagedeling*, Pernille Pind, Nyhedsbrev fra pernillepind.dk