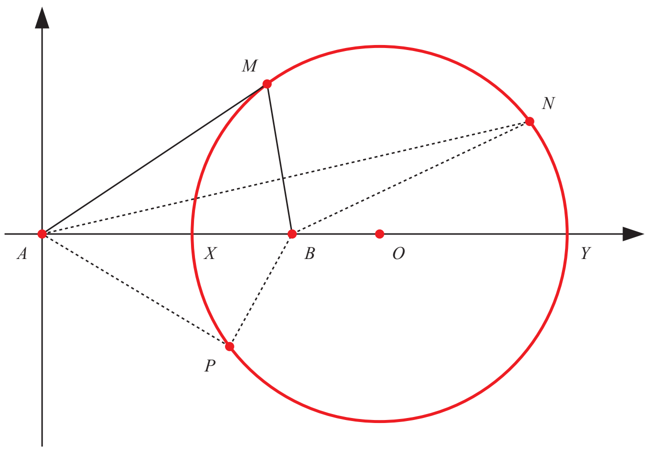
Apolloniuscirklen

Alija Muminagić, Nykøbing F. og Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Geometriundervisningen er i gymnasiet desværre udelukkende henvist til supplerende stof og spiller derfor en noget tilbagetrukket rolle. Kun på A–niveau findes lidt geometri i form af rumgeometri, der bedrives ved koordinatregninger. Det er trist, for geometri giver i høj grad mulighed for at gennemføre 'rene' matematiske argumenter, der ikke afhænger af symbolmanipulation. Dette sidste er vore elever nemlig ikke mestre i – for nu at sige det mildt.

Vi skal her se på et geometrisk sted, som i 'gamle dage' fandtes i enhver matematikers værktøjskasse, nemlig den såkaldte *Apolloniuscirkel* eller *forholdscirkel*. Den var desuden at finde i lærebøgerne for gymnasiet. Nu er den muligvis glemt.

Sætning. For to punkter A og B i planen er det geometriske sted for de punkter, hvis afstande til A og B har et givet forhold, en cirkel.



Bevis. Vi giver et bevis, som vi (lidt i strid med 'god geometrisk skik') gennemfører analytisk.

Vi kan antage, at $|AB| = 1$ og at det løbende punkt er M, så

$$\frac{|MA|}{|MB|} = r \ , \ r \neq 1$$

Hvis koordinaterne er $M = (x, y)$, $A = (0, 0)$ og $B = (1, 0)$, får vi

$$\frac{|MA|^2}{|MB|^2} = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2\left(x^2 - 2x + 1\right) + r^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-r^2)x^2 + 2r^2 x + (1-r^2)y^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{2r^2}{1-r^2}x + y^2 - \frac{r^2}{1-r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{r^2}{1-r^2}\right)^2 - \frac{r^4}{(1-r^2)^2} + y^2 - \frac{r^2}{1-r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{r^2}{1-r^2}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$$

Denne ligning fremstiller en cirkel med centrum i punktet

$$\left(\frac{r^2}{1-r^2}\ ,\ 0\right) \ \text{og radius} \ \frac{|r|}{|1-r^2|}.$$

Hvis M har den givne afstandsegenskab, ligger M på denne cirkel, der kaldes *Apolloniuscirklen* eller *forholdscirklen*. Hvis omvendt M ligger på cirklen, kan vi foretage regingerne i omvendt rækkefølge, så M's afstande til A og B har forholdet r.

Cirklens skæringspunkter X og Y med x–koordinaterne x_1 og x_2 fås sådan:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = r^2\left(x^2 - 2x + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - r^2\right)x^2 + 2r^2 x - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-2r^2 \pm \sqrt{4r^2}}{2(1-r^2)} = \frac{-2r^2 \pm 2r}{2(1-r^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{r(r \pm 1)}{r^2 - 1} = \frac{r(r \pm 1)}{(r+1)(r-1)}$$

altså

$$Y:\ x_1 = \frac{r}{r-1} \quad \text{og} \quad X:\ x_2 = \frac{r}{r+1}.$$

Disse to punkter deler linjestykket AB indvendigt og udvendigt i forholdet r. På figuren er nemlig

$$\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{\frac{r}{r+1}}{1 - \frac{r}{r+1}} = \frac{r}{r+1-r} = r \quad \text{og} \quad \frac{|YA|}{|YB|} = \frac{\frac{r}{r-1}}{\frac{r}{r-1} - 1} = r$$

Midtpunktet mellem X og Y har x–koordinaten

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r-1} + \frac{r}{r+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{r(r+1) + r(r-1)}{(r-1)(r+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2r^2}{r^2-1} = \frac{r^2}{r^2-1}$$

og dette er selvfølgelig centrum for forholdscirklen.