Parameterfremstilling for de 4 keglesnit i rummet

JØRGEN ANGELO, Ingeniørhøjskolen København

Denne artikel gennemgår parameterfremstilling af cirkel, ellipse, parabel og hyperbel opstået som keglesnit i det rumlige koordinatsystem. – Først lidt basalt stof.

Vi ser på en dobbeltkegle K. For nemheds skyld sørger vi for, at z–aksen er symmetriakse, og at Origo er toppunkt for dobbeltkeglen. Ligningen for keglen er

$$K: \quad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{k^2} \qquad (*)$$

Den positive konstant k afhænger af K´s hældningsvinkel β med (x, y)–planet sådan at $k = \tan(\beta)$.

Vi ser også på planet α: $a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0$. Hvis vi skærer planet α med K, fås et keglesnit. Vi forudsætter, at planet ikke skærer K i toppunktet. Vi har da et egentligt keglesnit, som optræder i 4 typer. Vi antager i det følgende, at hældningsvinkelen β er givet. Hvilken type keglesnit vi så får ved skæring med planet α, afhænger af planets hældningsvinkel γ med (x, y)–planet.

1. Hvis $\gamma = 0$, er keglesnittet en cirkel.
2. Hvis $\gamma < \beta$, er keglesnittet en ellipse.
3. Hvis $\gamma = \beta$, er keglesnittet en parabel.
4. Hvis $\gamma > \beta$, er keglesnittet en hyperbel.

Keglesnit, der giver en cirkel

Planet α skal her være vandret. Det vil sige, at normalvektoren $\vec{n}$ bliver lodret. Normalvektorens x– og y–koordinater bliver nul. Planets ligning bliver da af typen $\alpha: \quad c \cdot z + d = 0$.

Vi får heraf at z er konstant med værdien $z_0 = -\frac{d}{c}$. Som tidligere nævnt har dobbeltkeglen K ligningen (*) og cirklen C har radius $r = \left|\frac{d}{c \cdot k}\right|$. Cirklens centrum bliver da $P_{0,\alpha} = (0, 0, z_0)$.

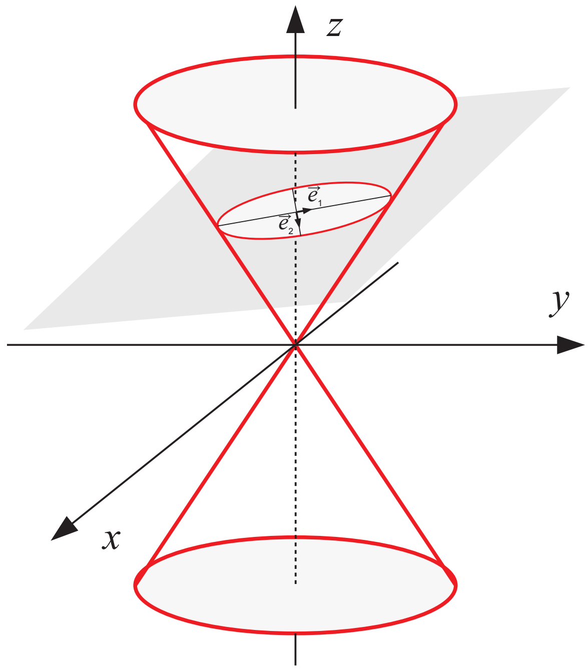
Da planet α er parallelt med (x, y)–planet, kan vi tillade os at benytte de samme enhedsvektorer i planet α som i (x, y)–planet, altså sætte $\vec{e_1} = \vec{i}$ og $\vec{e_2} = \vec{j}$. Vi får da parameterfremstillingen for cirklen C:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} + r \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{i} + r \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{j}, \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

Keglesnit, der giver en ellipse

Vi har her at γ er mindre end β. Vi minder for god ordens skyld om ligningen for K (*). Den positive konstant k afhænger af dobbeltkeglens hældningsvinkel β med (x, y)–planet, sådan at $k = \tan(\beta)$.

Planet α har hældningsvinklen γ med (x, y)–planet. Det indses, at ellipsens storakse umiddelbart ligger parallelt med retningen, vi måler hældningsvinklen γ i. Vi fremstiller nu to basisvektorer, sådan at den første basisvektor har den før nævnte retning. Vi projicerer z–aksens enhedsvektor $\vec{k}$ ned på planet α, og får en vektor



$$\overrightarrow{k_\alpha} = \vec{k} - \frac{\vec{k} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}, \quad \text{hvor } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

er normalvektoren til planet α.

Ved at dividere ovenstående vektor med dens egen længde fås en enhedsvektor, som vi kan kalde $\vec{e_1}$. Det vil sige $\vec{e_1} = \frac{1}{|\overrightarrow{k_\alpha}|} \cdot \overrightarrow{k_\alpha}$.

Jeg finder nu $\vec{e_2}$, idet kravet til denne vektor er, at den skal være ortogonal med $\vec{e_1}$ og samtidig ligge i planet, det vil sige at den også skal være ortogonal med $\vec{n}$. For at begge krav om ortogonalitet skal være overholdt, beregner vi vektorproduktet $\vec{v} = \vec{e_1} \times \vec{n}$ og vælger til sidst at $\vec{e_2} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$.

Vi har nu to ortogonale enhedsvektorer i planet α, som svarer til vektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$ i (x, y)–planet.

Vi skal nu finde ellipsens centrum. Dette gøres ved at lave en parameterfremstilling for linien gennem ellipsens storakse ***a***. Vi starter med at fastlægge punktet $D = (0, 0, -\frac{d}{c})$, som er planets skæringspunkt med z–aksen. ***a*** får da parameterfremstillingen: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \vec{e_1}, s \in R$. Ved at sætte denne parameterfremstilling ind i ligningen for omdrejningskeglefladen, bestemmes to værdier for parameteren s. Ved igen at sætte disse to værdier af s ind i parameterfremstillingen fås koordinaterne til de to endepunkter på ellipsens storakse her kaldet A_1 og A_2. Vi kan herefter finde begyndelsespunktet $P_{0,\alpha}$, som er midtpunktet mellem disse endepunkter. Vi har ligningerne

$$2 \cdot \vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} = \overrightarrow{OA_1} + \vec{a}$$

Vi skal nu finde længden af ellipsens lilleakse ***b***. Dette gøres ved at lave en parameterfremstilling for linien gennem ***b***: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} + s \cdot \vec{e_2}, s \in R$. Ved at sætte denne parameterfremstilling ind i ligningen for omdrejningskeglefladen, bestemmes to værdier for parameteren s. Ved igen at sætte disse to værdier af s ind i ligningen for omdrejningskeglefladen, fås koordinaterne til de to endepunkter af **b**, her kaldet B_1 og B_2. Vi har nu at $2 \cdot b = |B_1B_2|$.

Ud fra ovenstående betragtninger fås derfor parameterfremstillingen for ellipsen C:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} + a \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{e_1} + b \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e_2}, \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

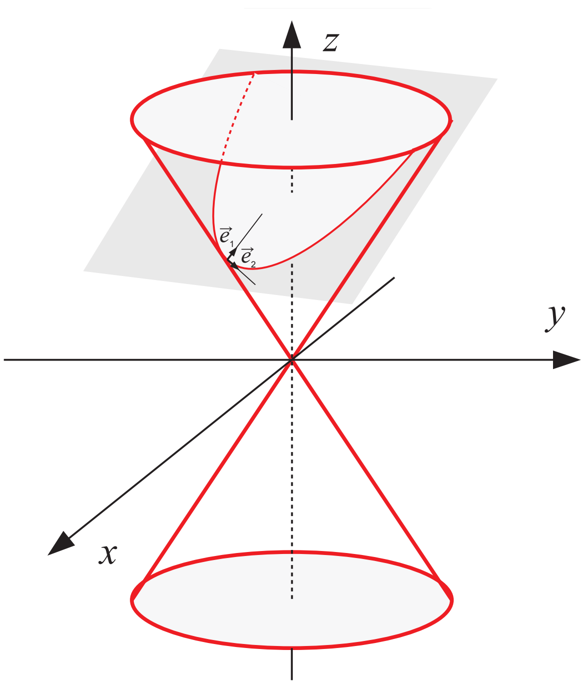
Keglesnit, der giver en parabel

Vi har at $\gamma = \beta$. Vi fremstiller de to basisvektorer $\vec{e_1}$ og $\vec{e_2}$ på samme måde som i afsnittet om ellipsen. Det indses, at parablens symmetriakse ligger umiddelbart parallelt med den retning, vi måler planets hældningsvinkel γ i. Det vil altså sige, at $\vec{e_1}$ vil være parallel med parablens symmetriakse.

Vi skal nu finde parablens toppunkt. Dette gøres ved at lave en parameterfremstilling for parablens symmetriakse. Vi starter med at fastlægge punktet $D = (0, 0, -\frac{d}{c})$, som er planets skæringspunkt med z–aksen. Parablens symmetriaksen får da parameterfremstillingen: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \vec{e_1}, s \in R$. Ved at sætte denne parameterfremstilling ind i keglernes ligning, bestemmes parameteren s. Ved igen at sætte parameteren s ind i parameterfremstillingen fås koordinaterne til parablens toppunkt T.

Idet vi husker, at parablens generelle regneforskrift i (x, y)–planet er $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$, vil vi nu finde konstanten A for den givne parabel.
Ud fra toppunktet T vil vi i vores lokale koordinatsystem (x', y') gå "1 til siden og A op", idet den direkte beregning foregår med vektorer, se skitsen. Først beregnes punktet Q idet $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OT} + \vec{e_2}$. Fra dette punkt går vi parallelt med $\vec{e_1}$ op, til vi når skæring med keglen i punktet R. Vi laver en parameterfremstilling for en linie q: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + u \cdot \vec{e_1}$. Parameterfremstillingen indsættes i keglens ligning, og parameteren u beregnes. Faktisk behøver vi ikke at beregne koordinaterne til punktet R, idet det er A, vi vil finde, og $A = u$.
Parameterfremstillingen for en parabel med toppunkt i Origo hedder i (x, y)–planet $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{i} + A \cdot t^2 \cdot \vec{j}, t \in R$. For den aktuelle parabel får vi nu uden videre parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} + t \cdot \vec{e_2} + A \cdot t^2 \cdot \vec{e_1}, t \in R$$



Keglesnit, der giver en hyperbel

Der gælder her, at $\gamma > \beta$. Vi fremstiller de to basisvektorer $\vec{e_1}$ og $\vec{e_2}$ på samme måde som før. Det indses, at den ene af hyperblens symmetriakser ligger umiddelbart parallelt med den retning, vi måler planets hældningsvinkel γ i. Det vil altså sige, at $\vec{e_1}$ vil være parallel med hyperblens ene symmetriakse.

For overblikkets skyld ser vi allerede nu på hyperblens parameterfremstilling, når den ligger nede i (x, y)–planet med centrum i origo. Denne parameterfremstilling hedder

$$\overrightarrow{OP} = a \cdot \cosh(t) \cdot \vec{i} + b \cdot \sinh(t) \cdot \vec{j}, t \in R$$

Ligningen for hyperblen er $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dette kan vi udnytte,

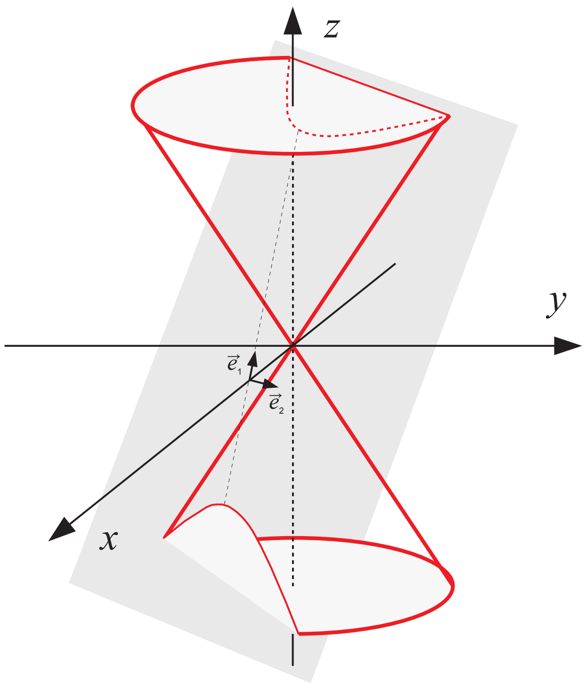
hvis vi kender konstanten a og ønsker at finde konstanten b.

Vi vender tilbage til vores rumlige problemstilling. Vi vil først finde hyperblens toppunkter. Dette gøres ved at lave en parameterfremstilling for hyperblens symmetriakse. Vi starter med at fastlægge punktet $D = (0, 0, -\frac{d}{c})$, som er planets skæringspunkt med z–aksen. Symmetriaksen får da parameterfremstillingen: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \vec{e_1}, s \in R$. Ved at sætte denne parameterfremstilling ind i dobbeltkeglens ligning, bestemmes to værdier for parameteren s. Ved igen at sætte de to værdier af s ind i parameterfremstillingen fås koordinaterne til hyperblens to toppunkter her kaldet T_1 og T_2. Vi kan herefter finde midtpunktet mellem disse endepunkter. Dette midtpunkt er hyperblens begyndelsespunkt $P_{0,\alpha}$. Af praktiske grunde sætter vi $2 \cdot a = |T_1T_2|$, og finder $2 \cdot \vec{a} = \overrightarrow{T_1T_2}$, $\overrightarrow{OP_{0,\alpha}} = \overrightarrow{OT_1} + \vec{a}$.

Vi har nu $P_{0,\alpha}$ og a. b kan findes af ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Men først skal man finde et ekstra punkt på hyperblen. Vi går fra det højre toppunkt "én til højre" ud ad vores lokale toppunktsakse. Derved fås punktet $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OT_2} + \vec{e_1}$. Vi laver herefter parameterfremstillingen for en linie l vinkelret på toppunktsaksen $l : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{e_2}$.

Ved indsættelse af parameterfremstillingen i keglens ligning findes to værdier af parameteren s, som er numerisk lige store med modsatte fortegn. Hver værdi svarer til et punkt på hyperblen og $y' = s$ i vores lokale koordinatsystem. Vi vælger punktet med positivt fortegn for $s = y'$. Vi har nu fundet et punkt Q på hyperblen. I det lokale koordinatsystem (x', y')



har punktet Q koordinaterne $(a + 1, s)$.

Punktet opfylder hyperblens ligning $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

Vi indsætter punktet Q's koordinater i ligningen, og får derved

$$\frac{(a+1)^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

Løses denne ligning med hensyn til b, får man at

$$b = \frac{s \cdot a}{\sqrt{(a+1)^2 - a^2}}$$

Nu er vi omsider helt parate til at skrive parameterfremstillingen for hyperblen, som har to grene.

Højre gren: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} + a \cdot \cosh(t) \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \sinh(t) \cdot \vec{e}_2, t \in R$

Venstre gren: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{0,\alpha}} - a \cdot \cosh(t) \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \sinh(t) \cdot \vec{e}_2, t \in R$

Afsluttende kommentarer

Vi har slet ikke berørt spørgsmålet om brændpunkter. For god ordens skyld nævnes det, at brændpunkterne fremkommer som tangentpunkter for to kugler, der ligger henholdsvis over og under planet α, og som hver især tangerer både keglen og planet. Man kan selvfølgelig regne sig frem til disse brændpunkter og ad denne vej konstruere sine parameterfremstillinger. Det har jeg undladt at gøre i denne artikel.