Mere om højdernes skæringspunkt

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Alija Muminagić, Nykøbing F.

Vi så i LMFK–bladet nr. 3 på forskellige beviser for, at en trekants højder går gennem samme punkt. Da der er tale om linjer og linjestykker, der er vinkelret på hinanden, er et bevis med vektorer oplagt. Vi anfører to beviser.

Sætning. I ΔABC går højderne gennem samme punkt

Bevis 1. Lad BE og CF være højder med skæringspunkt H. Vi ser på vektorerne

$$\vec{a}=\overrightarrow{HA}\ ,\ \vec{b}=\overrightarrow{HB}\ ,\ \vec{c}=\overrightarrow{HC}$$

Så er

$$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}\ ,\ \overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$$

Vi har, at

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \quad \text{og} \quad \vec{c}\cdot\overrightarrow{BA}=0$$

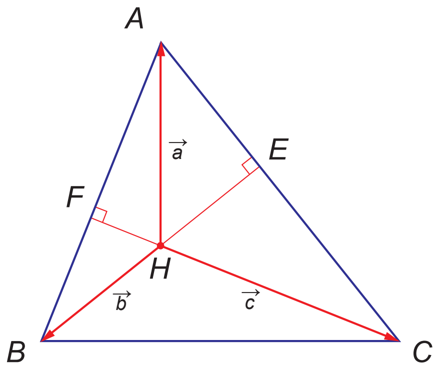
eller

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0 \quad \text{og} \quad \vec{c}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$$

Subtraktion af den ene ligning fra den anden giver

$$\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

Dermed er $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{CB}$, hvilket betyder, at H ligger på højden fra A.



Bevis 2. Vi sætter

$$\overrightarrow{BC}=\vec{a}\ ,\ \overrightarrow{CA}=\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{BA}=\vec{c}\ ,\ \overrightarrow{AH}=\vec{d}\ ,$$

hvor H igen er skæringspunkt mellem højderne BE og CF. Forlængelsen af AH skærer BC i D. Nu er

$$\overrightarrow{BH}=\vec{c}+\vec{d} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{CH}=\vec{b}+\vec{d}$$

så vi får

$$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{c}+\vec{d}\right)\cdot\vec{b}=0 \quad \text{og}$$

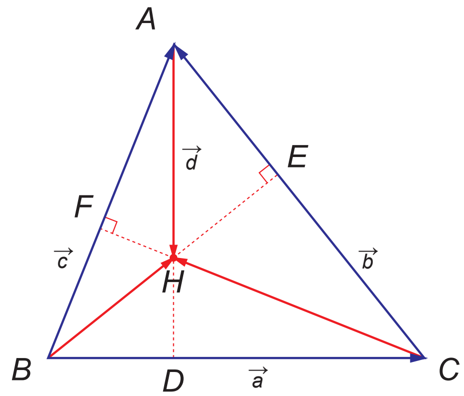
$$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{BA} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\vec{c}=0$$

Heraf fås

$$\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\vec{c}\ -\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\cdot\vec{b}=0 \ \Leftrightarrow\ \vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{d}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0 \ \Leftrightarrow\ \vec{d}\cdot\vec{a}=0 \ \Leftrightarrow\ \vec{d}\perp\vec{a}$$

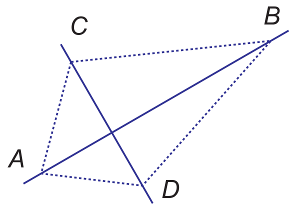
Altså er AD højde i trekanten.



Vi anfører derefter et plangeometrisk bevis, der bygger på følgende lemma, som vi ikke viser (det er faktisk let!):

Lemma. En linje gennem punkterne A og B er vinkelret på linjen gennem punkterne C og D netop hvis

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$



På grundlag af dette beviser vi sætningen om højdernes skæringspunkt.

Bevis 3. Da $BH\perp AC$ giver lemmaet, at

$$AB^2+CH^2=AH^2+BC^2$$

og da $CH\perp AB$, er

$$AC^2+BH^2=AH^2+BC^2$$

Af disse ligninger følger

$$AB^2+CH^2=AC^2+BH^2$$

Efter lemmaet medfører dette at $AH\perp BC$.